MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Derivace a určitý integrál funkce jedné proměnné

Bakalářská práce

Brno 2021

Vedoucí práce: RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D. Autor práce: Lucie Šerá

Bibliografický záznam

ŠERÁ, Lucie. *Derivace a určitý integrál funkce jedné proměnné.* Brno, 2021. 65 s. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Fakulta pedagogická. Katedra pedagogiky. Vedoucí práce RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Anotace

Bakalářská práce „Derivace a určitý integrál jedné proměnné“ se pokouší charakterizovat nástroje matematické analýzy a popsat jejich aplikaci při popisu rovnoměrného pohybu hmotného bodu v dvojrozměrném prostoru. Cílem práce je poukázat na provázanost předmětů matematiky a fyziky v konkrétním směru, a tak vytvořit ucelený text, který nabízí pohled na význam derivací a integrálů v praxi. V prvních třech kapitolách se práce věnuje teoretickým poznatkům o matematické analýze, v poslední kapitole je popsán plynulý přechod do praktického využití.

Annotation

The bachelor’s thesis „Derivative and a definite integral of one variable“ attempts to characterize the tools of mathematical analysis and describe their application in the description of the uniform motion of a material point in the two – dimensional space. The main aim of the work is to point out the interconnection of subjects of mathematics and physics in a specific direction, and thus to create a comprehensive text that offers a view of the meaning of derivatives and integrals in practice. In the first three chapters, the work deals with theoretical knowledge about mathematical analysis, in the last chapter, there is described a smooth transition to the practical use.

Klíčová slova

Limita funkce, derivace, neurčitý integrál, určitý integrál, rovnoměrný přímočarý pohyb, rovnoměrný zrychlený pohyb, dráha, rychlost, zrychlení.

Keywords

Limit of a function, derivative, indefinite integral, definite integral, uniformly deccelarated motion, uniformly accelerated motion, path, velocity, acceleration.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použila jen prameny uvedené v seznamu literatury.

V Brně dne ……...

.....

Lucie Šerá

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce, panu RNDr. Břetislavu Fajmonovi, Ph.D. za jeho čas, který věnoval kontrolám práce, za ochotu, cenné rady, trpělivost a za profesionální vedení.

Obsah

ÚVOD **6**

1. LIMITA FUNKCE **7**

1.1 ZNAČENÍ POJMU LIMITA FUNKCE 7
1.2 DEFINICE POJMU LIMITA FUNKCE 9
1.3 PŘÍKLADY 9

2. DERIVACE **11**

2.1 DEFINICE POJMU DERIVACE 11
2.2 VZORCE A PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ DERIVACÍ 13
2.3 VYUŽITÍ DERIVACE VE FYZICE 15
2.4 PŘÍKLADY 16

3. INTEGRÁLY **17**

3.1 NEURČITÝ INTEGRÁL 17
3.1.1 Definice neurčitého integrálu 17
3.1.2 Vzorce a pravidla pro počítání neurčitého integrálu 18
3.1.3 Využití neurčitého integrálu ve fyzice 22
3.1.4 Příklady 23
3.2 URČITÝ INTEGRÁL 25
3.2.1 Definice určitého integrálu 25
3.2.2 Vztah určitého a neurčitého integrálu 31
3.2.3 Pravidla pro počítání určitého integrálu 31
3.2.4 Využití určitého integrálu 35
3.2.5 Příklady 38

4. FYZIKÁLNÍ ČÁST **41**

4.1 POHYB A JEHO VLASTNOSTI 41
4.2 POLOHA A POSUNUTÍ 41
4.3 PRŮMĚRNÁ RYCHLOST A PRŮMĚRNÁ VELIKOST RYCHLOSTI 42
4.4 OKAMŽITÁ RYCHLOST 44
4.4.1 Velikost okamžité rychlosti 44
4.4.2 Případy závislosti pozorovaného objektu na čase 44
4.4.3 Příklad 47
4.5 ZRYCHLENÍ 50
4.5.1 Příklady 51
4.6 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ PŘÍMOČARÝ POHYB 51
4.6.1 Příklad 53
4.7 GRAFICKÉ INTEGROVÁNÍ PŘI ANALÝZE POHYBU 54
4.7.1 Příklad 58
4.8 ZRYCHLENÍ VOLNÉHO PÁDU 61
4.8.1 Příklad 62

ZÁVĚR **63**

POUŽITÁ LITERATURA **64**

Úvod

Matematika je velmi často společností považována za vědní obor, který je více abstraktní a teoretický, než praktický. Mnohdy se setkáváme s tím, že žáci a studenti naprosto přesně ví, jakým postupem vypočítat určitý příklad. Co ovšem velké části z nich uniká, je význam výsledku, ke kterému se dopočítají. Studenti netuší, jestli výsledek daného příkladu představuje množství, délku, obvod, obsah, objem či funkční hodnotu dané funkce. Tento problém může být způsoben nedostatečným vysvětlením významu v praxi.

Kupříkladu učivo matematiky je od učiva fyziky na středních školách / gymnáziích bohužel v obrovské míře stále separováno. Jen zřídka se objevují případy, kdy je studentům ukázána provázanost těchto dvou předmětů. Na základě této skutečnosti jsem se rozhodla vybrat si učivo matematické analýzy a zpracovat svou bakalářskou práci na téma Derivace a určitý integrál jedné proměnné, kde se zaměřím právě na využití zmíněných matematických operací ve fyzice při rovnoměrném pohybu.

Rovnoměrný pohyb je standardně učivem prvního ročníku středních škol / gymnázií, derivace jsou naopak často učivem čtvrtého ročníku nebo dokonce pouze seminářů, kde se vyučují základy vysokoškolské matematiky.

Hlavním cílem mé bakalářské práce je poukázat na jedno z možných propojení oblasti matematiky matematické analýzy s oblastí fyziky rovnoměrného pohybu hmotného bodu v dvojrozměrném prostoru.

Bakalářská práce je rozdělena na matematickou a fyzikální část. Obsahem první kapitoly je vysvětlení pojmu limity funkce, následně je ve druhé kapitole věnováno pár okamžiků derivacím, u nichž je objasněno, o co se vlastně jedná, jaké pro ně platí pravidla a jakými postupy je lze vypočítat. Ve třetí kapitole matematické části se práce zabývá integrály, které se dělí na integrál neurčitý a určitý. U neurčitého integrálu se pozastavuje nad jeho definicí a způsoby výpočtů, ale také odhaluje spojitost právě mezi neurčitým integrálem a derivací. Poté je zmíněno něco málo o integrálu určitém včetně popisu jeho geometrického významu. Práce dále proniká z matematické části do části fyzikální, ve které je věnována pozornost převážně rovnoměrně přímočarému a rovnoměrně zrychlenému pohybu. V této kapitole jsou zužitkovány veškeré vědomosti z matematické části a uvedeny do praxe.

1. Limita funkce

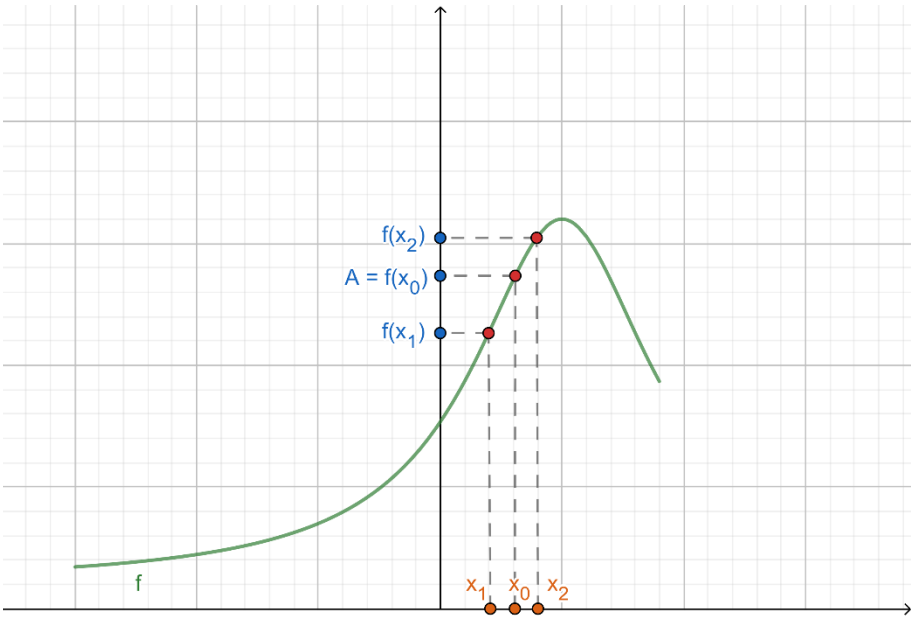
Dříve, než se budeme zabývat samotnými derivacemi funkcí, si vysvětlíme velmi zjednodušeně pojem limita funkce. Ta je důležitá pro popis chování grafu funkce v určitých specifických bodech, jako jsou $-\infty, +\infty$ (= nevlastní body) a tzv. body nespojitosti. Samotné tyto body nijak specifikovat nelze, a proto využíváme právě limitu funkce, která popisuje chování funkce v okolí daného bodu, ať už se jedná o bod vlastní nebo nevlastní.

1.1 Značení pojmu limita funkce

Limitu funkce f v bodě x_0 značíme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

kde $x \to x_0$ znamená, že proměnná x se blíží k určité zvolené hodnotě x_0 a zároveň říká, že se zajímáme o chování funkčních hodnot $f(x)$ pro x z nějakého okolí bodu x_0 (pojem okolí bodu si za chvíli vysvětlíme).

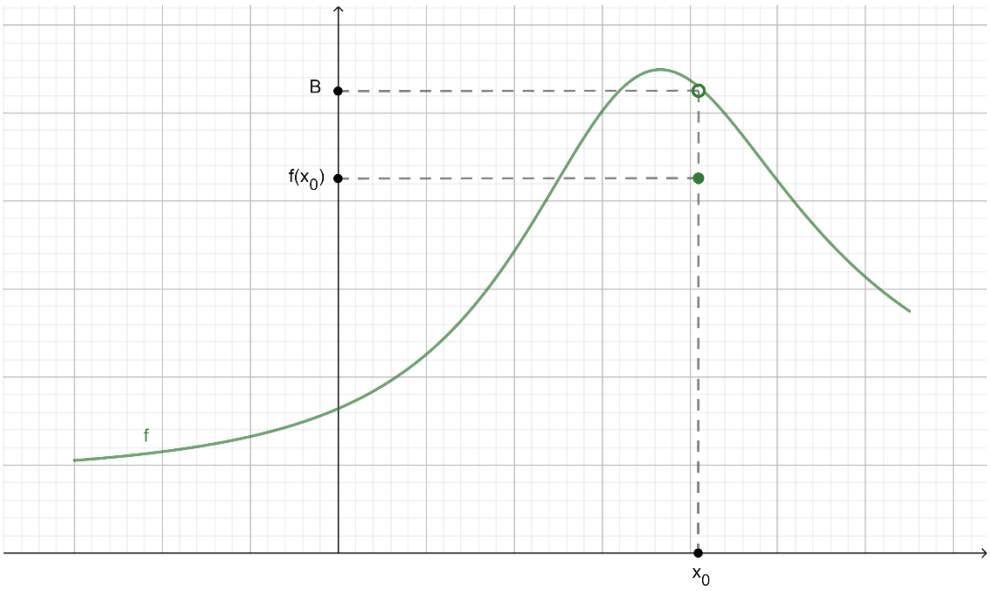


Obrázek 1

V tomto případě (viz Obrázek 1) se jedná o spojitou funkci a grafem je tedy nepřerušená křivka. Limita daného bodu na grafu spojité funkce se proto rovná právě funkční hodnotě v daném bodě

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A = f(x_0).$$

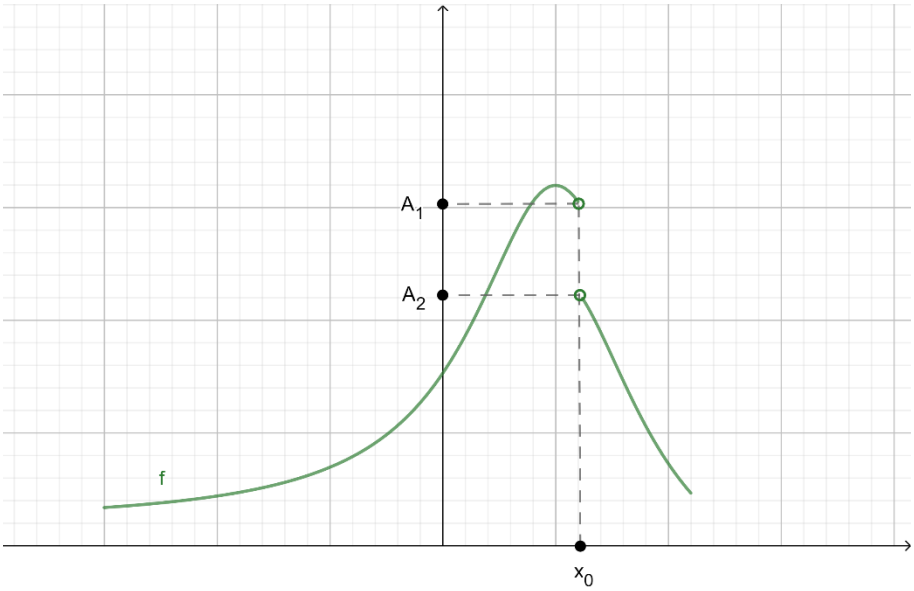
Z této úvahy vyplývá tvrzení: Funkce f je na intervalu $(a; b)$ spojitá právě tehdy, když $\forall x_0 \in (a; b)$ je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Obrázek 2

V tomto grafu funkce (viz Obrázek 2) se již o spojitou funkci nejedná právě díky jednomu bodu, který není součástí křivky, a proto platí:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = B \neq f(x_0)}.$$



Obrázek 3

Zde (viz Obrázek 3) je graf rozdělen na dvě samostatné části, proto pro $x < x_0$ se $f(x)$ chová jinak než pro $x > x_0$. Pro $A_1 \neq A_2$ tedy vyplývá, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje, protože $f(x)$ se musí chovat pro x menší či větší než x_0 přibližně stejně. Proto se v těchto případech zavádí pojem jednostranná limita.

- Limita zleva v bodě x_0 nespojité funkce f:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A_1}$$

(čteme: limita pro x jdoucí k x_0 zleva se rovná hodnotě A_1),

kde se blížíme od menších hodnot k danému x_0, proto má x_0 jako horní index znaménko mínus.

- Limita zprava v bodě x_0 nespojité funkce f:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A_2}$$

(čteme: limita pro x jdoucí k x_0 zprava se rovná hodnotě A_2),

kde se blížíme naopak od větších hodnot k danému x_0, proto má x_0 jako horní index znaménko plus.

1.2 Definice pojmu limita funkce

Nechť f je funkce, nechť x_0 je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Předpokládejme, že f je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu x_0. Nechť L je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Řekneme, že L je limita funkce f pro x jdoucí k x_0, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nějaké $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $x \in D(f)$ splňující $x \in U_\delta(x_0) - \{x_0\}$ platilo $f(x) \in U_\varepsilon(L)$.

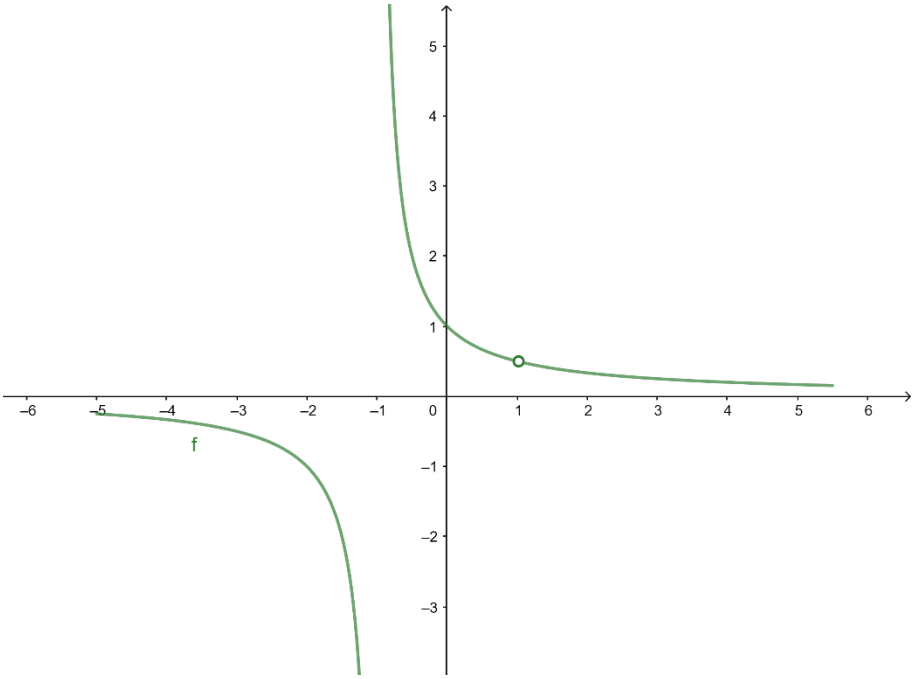
1.3 Příklady

Jako nejjednodušší příklad si můžeme uvést zadání, u kterého jsme schopni zjistit výsledek pouhým dosazením.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3}{3} = \frac{3^3}{3} = 9$$

Funkce je v bodě x_0 spojitá, proto jsme mohli do zadání pouze hodnotu dosadit, a limita se tedy rovná funkční hodnotě v bodě $x_0 = 3$.

V dalším příkladu si již s pouhým dosazením x_0 do zadání nevystačíme jednoduše z toho důvodu, že bychom tímto postupem dospěli k výsledku, kterým by byl nedefinovatelný výraz $\frac{0}{0}$.



Obrázek 4

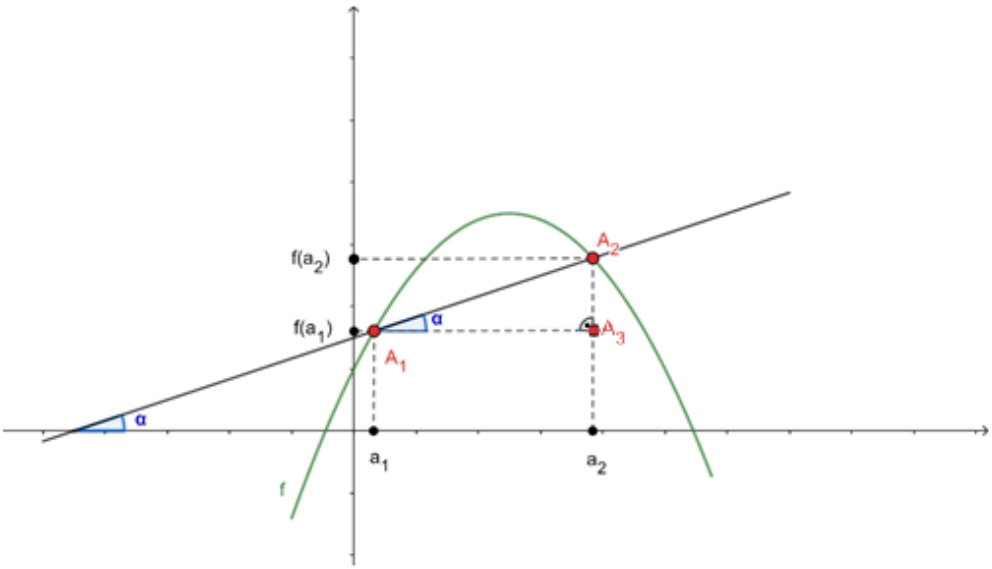
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Zde si všímáme, že daná funkce je v bodě $x = 1$ nespojitá. Pomocí triviálního rozložení jmenovatele můžeme zjednodušit celý výraz limity. Z nespojité funkce tedy vytvoříme funkci spojitou. Závorku $(x - 1)$ můžeme v čitateli i jmenovateli zkrátit, neboť z definice limity funkce víme, že počítáním limity funkce v bodě x_0 zkoumáme její chování v ryzím prstencovém okolí bodu x_0. Výsledkem závorky by tedy bylo velmi malinké číslo, nikdy ne 0. Následně již jen dosadíme do výrazu bod $x_0 = 1$.

2. Derivace

2.1 Definice pojmu derivace

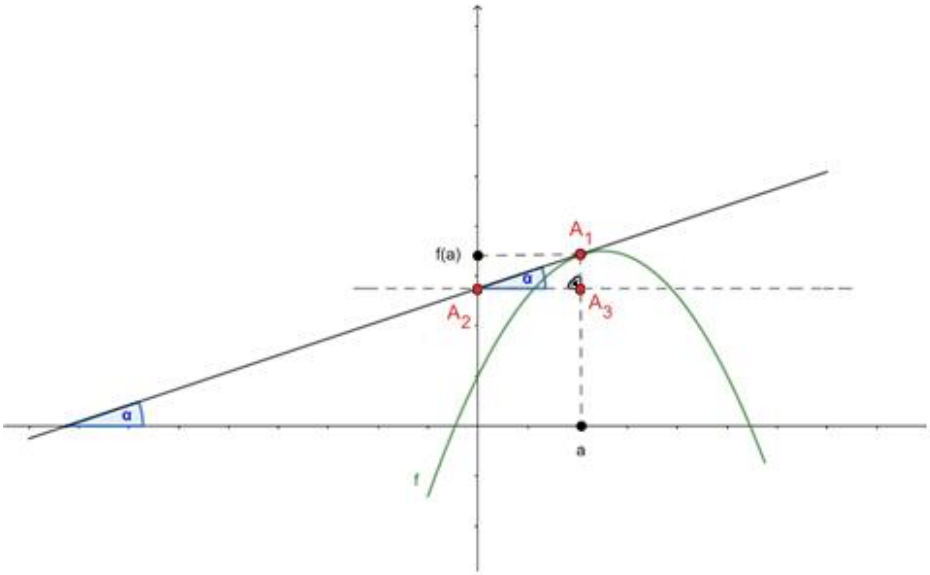
Derivací funkce získáme směrnici tečny. Než se ovšem k tomuto případu dostaneme, podíváme se prvně na to, jak získáme směrnici sečny.



Obrázek 5

Na obrázku viz výše vidíme graf kvadratické funkce f, který ve dvou bodech A_1 a A_2 protíná přímka = tzv. sečna. Návod na zisk směrnice sečny nalezneme právě ve výše zmiňovaném obrázku pomocí pravoúhlého trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Zde si můžeme všimnout, že odchylka sečny s vodorovnou osou je shodná s odchylkou sečny s přímkou procházející body A_1 a A_3 v pravoúhlém trojúhelníku, která je zároveň kolmá na svislou osu. Pro výpočet směrnice sečny tedy použijeme goniometrickou funkci tangens a dostaneme:

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{f(a_2) - f(a_1)}}{\boldsymbol{a_2 - a_1}}\,.$$



Obrázek 6

V tomto obrázku můžeme vidět graf kvadratické funkce f, kterou protíná přímka v jednom jediném bodě (A_1) = tzv. tečna. Opět nám vznikne pravoúhlý trojúhelník $A_1A_2A_3$, kde body A_1 a A_2 prochází již zmiňovaná tečna. I zde platí, že odchylka tečny s vodorovnou osou je shodná s odchylkou, kterou svírá přímka procházející body A_1 a A_2 s přímkou procházející body A_2 a A_3v pravoúhlém trojúhelníku, jež je zároveň kolmá ke svislé ose.

Směrnici tečny nemůžeme určit pomocí dvou bodů ležících na grafu funkce, protože máme k dispozici jen jeden bod. Avšak zde můžeme využít limitu, kterou jsme si objasnili v předcházející kapitole. Pracujeme tady s hodnotou b, která se limitně blíží k hodnotě a. Pokud počítáme limitu směrnice sečen pro x jdoucí k bodu x_0, znamená to, že vytváříme posloupnost sečen, z nichž bod průniku $[x_0; f(x_0)]$ se nemění a druhý bod průniku $[x; f(x)]$ se neustále přibližuje k bodu prvnímu, až v limitě tyto dva body průniku sečny a grafu splynou v jeden bod dotyku tečny a grafy (ve skutečnosti nesplynou nikdy). Znamená to tedy, že hledáme derivaci v bodě a. V tomto případě získáme již správný výraz:

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pokud bychom chtěli výraz vyjádřit matematicky lépe, použili bychom místo neznámých a a b (kde počítáme derivaci v bodě a), které se v matematice obecně příliš často nepoužívají, hodnoty x a x_0 (kde počítáme derivaci v bodě x_0). Pak tedy pro funkci $f(x)$ dostaneme výraz:

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \lim_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{f(x) - f(x_0)}}{\boldsymbol{x - x_0}}.$$

Několikrát již bylo zmíněno, že se snažíme zjistit derivaci funkce v daném bodě, avšak jsme stále používali goniometrickou funkci pro výpočet směrnice tečny. My ale už víme, že derivace je právě směrnice tečny, můžeme ji tedy rovnou nahradit za tangens úhlu α a získáme definici derivace: Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na nějakém okolí bodu x_0. Definujeme derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 vzorcem:

$$\boldsymbol{f'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{f(x) - f(x_0)}}{\boldsymbol{x - x_0}}.$$

Říkáme, že funkce f, která má v bodě x_0 derivaci, je diferencovatelná. *Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá*. Platnost předchozí věty je třeba také dokázat, což snadno provedeme pomocí limit: Protože $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, platí též $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim\limits_{x \to x_0} [(x - x_0)] \cdot f'(x_0)$.

Limita na pravé straně předchozí rovnosti je rovna nule, proto i levá strana je nulová, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$, neboli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.2 Vzorce a pravidla pro počítání derivací

Pro počítání derivací využíváme tabulku derivací elementárních funkcí:

Funkce	Derivace funkce	Podmínky pro derivaci
k	0	k je konstanta
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0, a \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$

$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Kromě této tabulky máme ještě několik pravidel pro počítání derivací s více funkcemi najednou. Mezi tato pravidla patří:

- Součtové $\quad (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$

  Součtové pravidlo je velmi jednoduché, proto si je ukážeme velmi rychle na jednom příkladu:

  Příklad: Vypočítejte $\left(\frac{2x^3}{5} + 4x\right)'$

  $$\left(\frac{2x^3}{5} + 4x\right)' = \left(\frac{2x^3}{5}\right)' + (4x)' = \frac{2 \cdot 3x^2}{5} + 4 = \frac{6x^2}{5} + 4 \quad \blacksquare$$

- Rozdílové $\quad (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' - \boldsymbol{g}'$

  Rozdílové pravidlo je v podstatě obdobou součtového pravidla, pouze se znaménkem mínus.

  Příklad: Vypočtěte $(\sin x - 2x^6)'$

  $$(\sin x - 2x^6)' = (\sin x)' - (2x^6)' = \cos x - 2 \cdot 6x^5 = \cos x - 12x^5 \quad \blacksquare$$

- Součinové $\quad (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'$

  Derivaci součinu bez součinového pravidla bychom počítali velice stěží. Proto si ukážeme alespoň jeden jednoduchý příklad.

  Příklad: Vypočtěte $(x^3 \sin x)'$

  $$(x^3 \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \quad \blacksquare$$

- Podílové $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

  Příklad: Vypočtěte $\left(\frac{3\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{x}}\right)'$

$$\left(\frac{3\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(3\,\mathrm{tg}\,x)'\sqrt{x} - 3\,\mathrm{tg}\,x\,(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{x} - 3\,\mathrm{tg}\,x\left((x)^{\frac{1}{2}}\right)'}{x} =$$

$$= \frac{\frac{3}{\cos^2 x}\sqrt{x} - 3\,\mathrm{tg}\,x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\frac{3}{\cos^2 x}\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{tg}\,x}{x} \quad \blacksquare$$

- Derivace složené funkce $[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f})]' = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f})\boldsymbol{f}'$

  Příklad: Vypočtěte $(\cos 5x)'$

  $(\cos 5x)' = \cos' 5x \cdot (5x)' = -\sin 5x \cdot 5 \quad \blacksquare$

2.3 Využití derivace ve fyzice

Derivací můžeme využít ve fyzice při popisu rychlosti a zrychlení daného objektu ze známé rovnice polohy.

Pokud bychom jako příklad rovnice pro polohu objektu měli zadanou funkci $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, dokážeme z ní jednoduše právě pomocí derivace získat předpis funkce pro rychlost pozorovaného objektu. V našem případě by byla výsledkem funkce $f'(x) = 4x - 6$.

Jestliže by bylo po nás vyžadováno i dopočítání zrychlení, kterého objekt dosáhl, můžeme odpověď získat pomocí derivace předpisu funkce pro rychlost objektu neboli druhou derivací předpisu funkce pro polohu pozorovaného objektu. Zápis tedy bude vypadat v našem případě $f''(x) = 4$, což znamená, že zrychlení daného objektu je konstantní. Pomocí grafů si polohu, rychlost i zrychlení objektu ukážeme až v kapitole 4. Fyzikální část.

2.4 Příklady

Prvním příkladem je zástupce jednoduché funkce, kterou lze snadno vyřešit pouze s pomocí tabulky derivací elementárních funkcí.

Příklad: Vypočtěte $(4x^2)'$

$(4x^2)' = 4 \cdot 2x^1 = 8x$ ■

Nyní si ten samý příklad zkusíme vypočítat podle definice.

$$(4x^2)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{4x^2 - 4x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{4(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{4(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 4(x + x_0) = 4(x_0 + x_0) = 8x_0 \quad ■$$

Postup při řešení derivace pomocí definice je pracnější, avšak se jím dostaneme postupně ke správnému řešení, stejnému jako tomu bylo u použití tabulky. Jediný rozdíl je ten, že výsledek získaný definicí pracuje s obecnou hodnotou v podobě x_0, ve které derivaci počítáme.

Druhým příkladem je součet funkcí, které bychom derivovali jak podle tabulky elementárních funkcí, tak i podle pravidel pro počítání derivací.

Příklad: Vypočtěte $(2x^2 + 3x - 4)'$

$(2x^2 + 3x - 4)' = 2 \cdot 2x^1 + 3 \cdot 1x^0 - 0 = 4x + 3$ ■

Opět si daný příklad zkusíme vypočítat podle definice.

$$(2x^2 + 3x - 4)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(2x^2 + 3x - 4) - (2x_0^2 + 3x_0 - 4)}{x - x_0} = \frac{2x^2 + 3x - 4 - 2x_0^2 - 3x + 4}{x - x_0} =$$

$$= \frac{2(x^2 - x_0^2) + 3(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)(x + x_0) + 3(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(x - x_0)[2(x + x_0) + 3]}{x - x_0} = 2(x + x_0) + 3 = 2(x_0 + x_0) + 3 = 4x_0 + 3 \quad ■$$

I v tomto případě jsme se dostali ke stejnému výsledku, i když pracnější cestou. Znova je zde změna pouze v označení neznámé, kdy u počítání z definice pracujeme s výpočtem derivace v obecném bodě x_0.

3. Integrály

3.1 Neurčitý integrál

Integrování je velmi jednoduše řečeno opakem derivování. Při počítání derivace určité funkce $f'(x)$ jsme vlastně hledali tečnu dané funkce $f(x)$ v námi zvoleném bodě.

Proces výpočtu integrování je ovšem poněkud náročnější na počítání než derivování. Důvodem je hledání tzv. primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$, která je mnohdy složitější. Tato funkce $F(x)$, kterou hledáme, splňuje v každém svém bodě x následující vlastnost: směrnice tečny ke grafu funkce $F(x)$ v bodě $[x; F(x)]$ je rovna $f(x)$. Funkce $F(x)$ s touto vlastností ovšem není jen jedna jediná. Tuto skutečnost si ukážeme na příkladu:

Pokud derivujeme funkci $f(x) = x^2$, získáme procesem derivace výsledek $f'(x) = 2x$. Jestliže si zkusíme spočítat ještě jeden primitivní příklad $F(x) = x^2 + 3$, dostaneme procesem derivace úplně stejný výsledek $F'(x) = 2x$. Zde si můžeme všimnout podstatného detailu, z kterého pak snadno vyvodíme velmi důležitý důsledek pro získání výsledků integrování. Jíž zmíněným detailem je konstanta, kterou v našem případě zastupovalo číslo 3. Tu nám proces derivace přetransformoval na 0. Díky tomuto zjištění můžeme usoudit, že výsledkem integrování, coby opačného procesu derivování, nebude pouze jedna funkce $F(x)$, nýbrž celá množina funkcí $F(x) + c$ lišící se právě o konstantu c.

3.1.1 Definice neurčitého integrálu

Znakem pro integrování je $\int dx$ a zápis procesu můžeme nastínit jednoduše:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + c},$$

přičemž musí platit podmínka: $x \in I$, kde I je tzv. otevřený interval a zároveň funkce $f(x)$musí být spojitá. Výsledkem integrování je tedy celá množina funkcí, která se liší o konstantu c.

3.1.2 Vzorce a pravidla pro počítání neurčitého integrálu

Pokud si před výpočtem zkontrolujeme, že funkce $f(x)$ splňuje nutnou podmínku spojitosti na intervalu I, což je interval, na kterém leží funkce $f(x)$, již chceme integrovat, můžeme se pustit do počítání.

Pro počítání integrálů jednoduchých, základních funkcí využijeme opět přehlednou tabulku a několik pravidel.

Funkce	Integrál funkce	Podmínky
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, x \in \mathbb{R}$ pro $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $n < 0$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$	$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, x \in (0; +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\operatorname{cotg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + c$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$	$x \in (-1; 1)$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$	$x \in (-1; 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	$x \in (-1; 1)$

$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$	$x \in (-1; 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccog} x + c$	$x \in \mathbb{R}$

Mezi pravidla, která se hojně využívají k výpočtům integrálů, patří:

- Integrál součtu či rozdílu funkcí lze spočítat postupně – s využitím několika samostatných integrálů pro jednotlivé funkce:

$$Jestliže\ f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), pak$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\,dx}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f_1(x)\,dx} + \int \boldsymbol{f_2(x)\,dx} + \cdots + \int \boldsymbol{f_n(x)\,dx}.$$

Pro tuhle metodu si uvedeme jednoduchý příklad.

Příklad: Vypočtěte $\int (x^2 + 2x + 8)\,dx$

$$\int (x^2 + 2x + 8)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx + \int 8\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 8x + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

- Konstanta, kterou násobíme či dělíme danou funkci, můžeme naprosto bez výčitek napsat před samotný integrál:

$$\int \boldsymbol{c \cdot f(x)\,dx} = \boldsymbol{c} \int \boldsymbol{f(x)\,dx}.$$

I tuhle jednoduchou úpravu si ukážeme na příkladu.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{x^3}{3}\,dx$

$$\int \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{12} + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

- Metoda per partes. Při použití této metody máme v zadání součin dvou funkcí $u(x) \cdot v(x)$ a smyslem je vhodně zvolit, kterou funkci budeme považovat v mezikroku za nederivovanou a kterou za již derivovanou.

Poté si jen doplníme k nederivované funkci derivovanou a k derivované nederivovanou a postupujeme podle předpisu:

$$\int \boldsymbol{u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx}.$$

Jednodušeji:

$$\int \boldsymbol{uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx}.$$

Metodu per partes můžeme v příkladech používat opakovaně. Na výsledek několikanásobné použití metody nemá žádný vliv.

Příklad: Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = x & v = -\cos x \\ u' = 1 & v' = \sin x \end{vmatrix} = -x\cos x - \int 1(-\cos x)\, dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Druhým příkladem bude možná na první pohled zvláštní zadání. Když si ovšem pozorně prohlédneme tabulku integrálů elementárních funkcí, zjistíme, že se následující příklad mezi nimi bohužel neobjevuje. Skutečnost, že máme pracovat v příkladu pouze s jednou funkcí, nás nezastaví a součin, který je nezbytný pro použití metody per partes, si jednoduše vytvoříme pomocí jedničky.

Příklad: Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v = x \\ u' = \frac{1}{x} & v' = 1 \end{vmatrix} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

- Substituční metoda. Metoda stojí na rozlišení mezi vnější a vnitřní složkou při integraci složené funkce, jestliže dokážeme vnější složku jednoduše integrovat. Postupujeme takto: nahradíme vnitřní funkci (složku) substitucí pomocí proměnné t. To, jakým písmenem vyjádříme substituční proměnnou, je na každém z nás, avšak je velmi důležité, abychom tuhle proměnnou drželi v celém zápisu příkladu. Zápis postupu je následující:

Jestliže označíme $\int f(t)\,dt = F(t) + c$, pak

$$\int \boldsymbol{f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F\varphi(x) + c, c \in \mathbb{R}}.$$

Nebo jednodušeji: Po zavedení substituce $\varphi(x) = t$ a výpočtu rovnosti diferenciálů $\varphi'(x)\,dx = dt$ lze nahradit dx pomocí dt a dostaneme

$$\int \boldsymbol{f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c, c \in \mathbb{R}}.$$

Ani tahle metoda jistě není úplně samozřejmá a myslím, že se shodneme na tom, že si nějaký ten příklad určitě zaslouží.

Příklad: Vypočtěte $\int \sin 6x\,dx$

$$\int \sin 6x\,dx = \left| \begin{matrix} 6x = t \\ 6dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{6} \end{matrix} \right| = \int \sin t \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int \sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{6}(-\cos t + c) = \frac{1}{6}(-\cos 6x + c), c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Jistě se shodneme na tom, že příklad viz výše je opravdu velmi jednoduchý. Proto si ukážeme ještě jeden náročnější.

Příklad: Vypočtěte $\int \sin^6 x \cdot \cos x\,dx$

$$\int \sin^6 x \cdot \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{matrix} \right| = (\cos x\,dx \text{ nahradíme } dt) =$$

$$= \int t^6\,dt = \frac{t^7}{7} + c = \frac{\sin^7 x}{7} + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

- Posledním pravidlem, o kterém se tady zmíníme, se bude týkat výpočtu integrálu podílu dvou funkcí, přičemž se ve jmenovateli bude vyskytovat daná funkce a v čitateli její derivovaná forma. Potom takový integrál můžeme vypočítat pomocí předpisu:

$$\int \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, c \in \mathbb{R}}.$$

K výpočtu jsme si dopomohli substitucí $\left| \begin{matrix} f(x) = t \\ f'(x) = dt \end{matrix} \right|$, kdy jsme poté integrovali $\frac{dt}{t}$ na $lnt + c$.

Je nám jasné, že bude velmi užitečné si názorně ukázat i toto pravidlo.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{2x^3}{x^4} dx$

$$\int \frac{2x^3}{x^4} dx = 2 \int \frac{x^3}{x^4} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4x^3}{x^4} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^4| + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Jak je vidět, ne vždy je v čitateli hned na první pohled vidět první derivaci jmenovatele. Není ovšem problém si první derivaci vyrobit. V tomto příkladu jsme si jako první napsali před samotný integrál dvojku, abychom mohli pohodlně doplnit do čitatele chybějící konstantu 4, která v čitateli vytvoří první derivaci jmenovatele, a současně výraz vydělit čtyřmi, aby se jednalo o ekvivalentní úpravu výrazu. Po tomto kroku již můžeme bez problému použít výchozí vzorec.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c =$$

$$= \ln|\sin x| + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

V tomto příkladu jsme narazili na podíl dvou goniometrických funkcí. Při výpočtu si lze pomoci substitucí, která je součástí výpočtu příkladu, a následně do zintegrovaného substituovaného předpisu dosadit původní neznámou. Druhou možností je okamžité uvědomění si, že funkce $\cos x$ je první derivací funkce $\sin x$ a na základě toho hned integrovat.

3.1.3 Využití neurčitého integrálu ve fyzice

Tak, jako jsme si u derivace ukazovali její využití u popisu polohy, rychlosti a zrychlení, si ukážeme tato využití u neurčitého integrálu zrovna tak. Jediný rozdíl bude ve směru, kterým budeme počítat jednotlivé veličiny.

Naším výchozím předpisem funkce bude předpis pro zrychlení $f(t) = 3$, ze kterého se budeme snažit vypočítat předpis pro rychlost a polohu pozorovaného objektu.

Předpis funkce pro rychlost vypočítáme tedy jako integrál našeho předpisu $v(t) = \int f(t)dt = \int 3\,dt = 3t + c$. Konstantu c lze interpretovat jako rychlost v_0.

Pro vyjádření předpisu polohy našeho objektu umíme vypočítat integrál integrálu předpisu funkce pro polohu objektu neboli integrál předpisu funkce pro rychlost objektu. V našem případě by to tedy bylo $x(t) = \int(\int 3\,dt)dt = \int(3t + v_0)\,dt = 3t^2 + v_0 t + d$. Konstantu d lze interpretovat jako polohu x_0.

Jednotlivé grafy popisující objekt si ukážeme až v kapitole 4. Fyzikální část.

3.1.4 Příklady

Prvním příkladem, který si tady uvedeme, bude příklad založený pouze na derivování jednotlivých členů (podle pravidel na str. 18).

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{x^3+3x^2+5}{x^2} dx$

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{x^2} dx = \int \frac{x^3}{x^2} dx + \int \frac{3x^2}{x^2} dx + \int \frac{5}{x^2} dx =$$

$$= \int x\,dx + \int 3\,dx + 5\int x^{-2}\,dx = x^2 + 3x - 5x^{-1} + c =$$

$$= x^2 + 3x - \frac{5}{x} + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Druhým příkladem je příklad integrálu goniometrické funkce, která je umocněná na druhou. V tomto příkladu využijeme našich znalostí a upravíme výraz pomocí goniometrických vzorců. Následně si jako v předchozím příkladu pomůžeme rozdělením na jednotlivé integrály a spočítáme je postupně.

Příklad: Vypočtěte $\int \mathrm{tg}^2\, x\, dx$

$$\int \mathrm{tg}^2\, x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1\, dx =$$

$$= \mathrm{tg}\, x - x + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Ve třetím příkladu si ukážeme použití metody per partes. Všímáme si totiž součinu dvou funkcí, kde můžeme jednu z nich upravit pomocí derivace a druhou pomocí integrace, což je podstata metody per partes: celý proces provádíme proto, že po dosazení do vzorce per partes dostaneme integrál ze součinu funkcí, který dovedeme provést.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v = \frac{-1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v' = \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x} - \int -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Čtvrtým příkladem je ukázka dvojího použití metody per partes. Následně nám vznikne rovnice, ze které vyjádříme hledanou hodnotu integrálu.

Příklad: Vypočtěte $\int e^x \sin x \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & v = e^x \\ u' = \cos x & v' = e^x \end{vmatrix} = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x \, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \cos x & v = e^x \\ u' = -\sin x & v' = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx\right) =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Vznikla nám rovnice:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Jako poslední příklad si uvedeme zástupce substituce. U tohoto typu příkladu nám nepomůže ani rozdělení integrálu na několik jednodušších (vlastnost linearity integrálového operátoru, viz str. 19), ani metoda per partes. Zůstává nám tedy využít tuto metodu. Zde je nejdůležitější si správně zvolit část výrazu, kterou chceme substituovat, abychom byli schopni příklad vypočítat.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x+1} = t \\ x + 1 = t^2 \\ dx = 2t \, dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{1+t} 2t \, dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt =$$

$$= 2 \int 1 \, dt + 2 \int -\frac{1}{1+t} dt = 2t + 2(-1) \ln|1+t| + c =$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 2 \ln\left|1 + \sqrt{x+1}\right| + c, c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

3.2 Určitý integrál

3.2.1 Definice určitého integrálu

Cílem postupu určitého integrálu je spočítat obsah mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $\langle a; b\rangle$ (tj. obsah tzv. podgrafu funkce $f(x)$).

Podmínky: $f(x) \geq 0$, spojitá na $\langle a; b\rangle$

$\Delta = x_i - x_{i-1}$, kde Δ určíme ze vztahu $\Delta = \frac{b-a}{n}$.

Následující vzorec pak vyjadřuje součet obsahů obdélníčku šířky Δ a výšky $f(x_i)$, viz obr. 7.

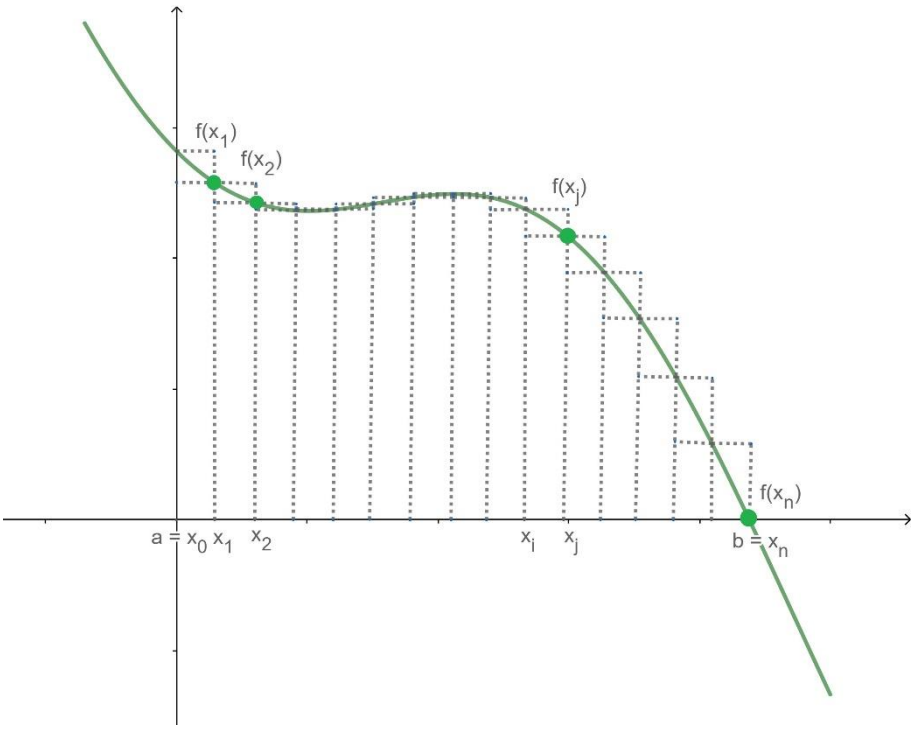
$$\boldsymbol{S_\Delta = \sum_{1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i)}$$

Pokud nyní existuje limita z výrazu S_Δ pro n jdoucí do nekonečna (tedy Δ jdoucí k nule), nazveme tuto limitu určitým integrálem:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),}$$

který nazýváme *Riemmanův integrál*.

Hodnoty b a a se nazývají meze určitého integrálu.



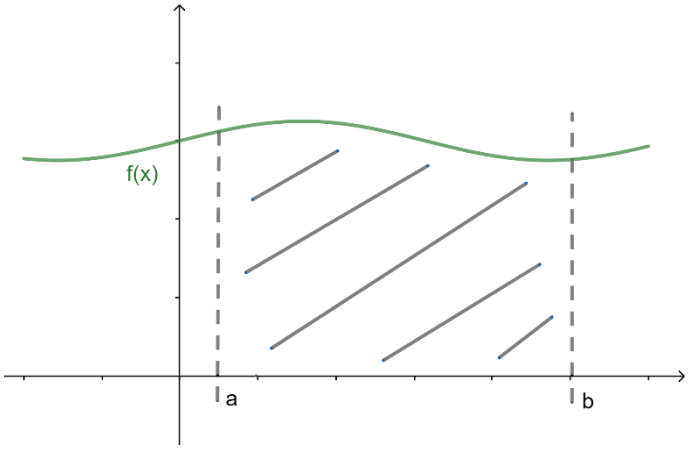
Obrázek 7

Poté pro obsah podgrafu platí předpis:

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\, dx}.$$

Pro počítání obsahu daného obrazce si uvedeme jednoduché rozdělení.

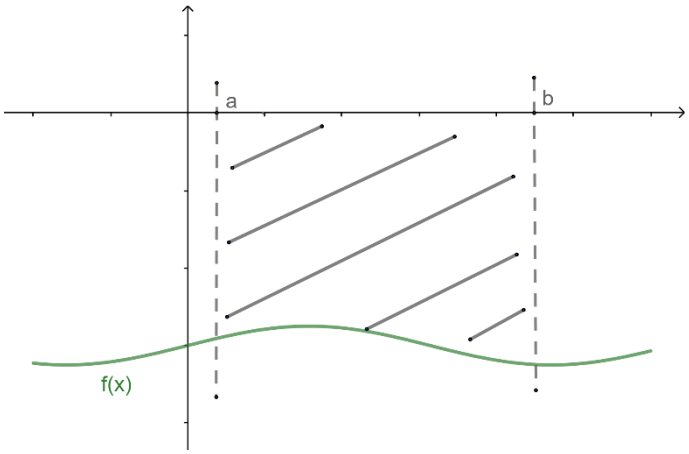
- Pokud počítáme obsah útvaru, jehož předpis funkce se pohybuje v kladných hodnotách na svislé ose $f(x) \geq 0$, vypočítáme obsah útvaru ohraničující body a a b na vodorovné ose a funkce $f(x)$ podle následujícího vzorce:



Obrázek 8

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\, dx}.$$

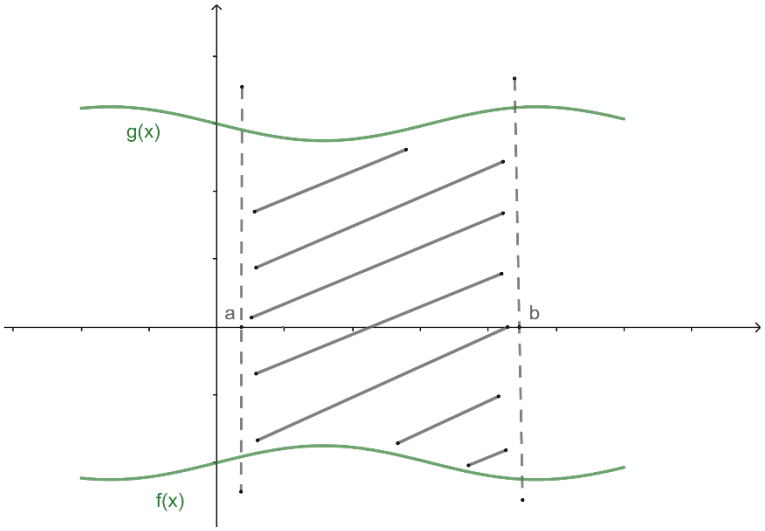
- V případě, že se graf funkce nachází pod vodorovnou osou $f(x) \leq 0$, obsah tohoto útvaru, který ohraničuje opět vodorovná osa a body a a b ležící na ní a funkce $f(x)$, vypočítáme pomocí vzorce:



Obrázek 9

$$\boldsymbol{S = \int_{a}^{b} \left(-f(x)\right) dx.}$$

- V posledním případě nám budou daný útvar, jehož obsah chceme vypočítat, ohraničovat dvě různé funkce. Potom bude výpočet pro obsah tohoto úvaru, který tedy ohraničují již zmíněné dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ a na vodorovné ose body a a b vypadat následovně:

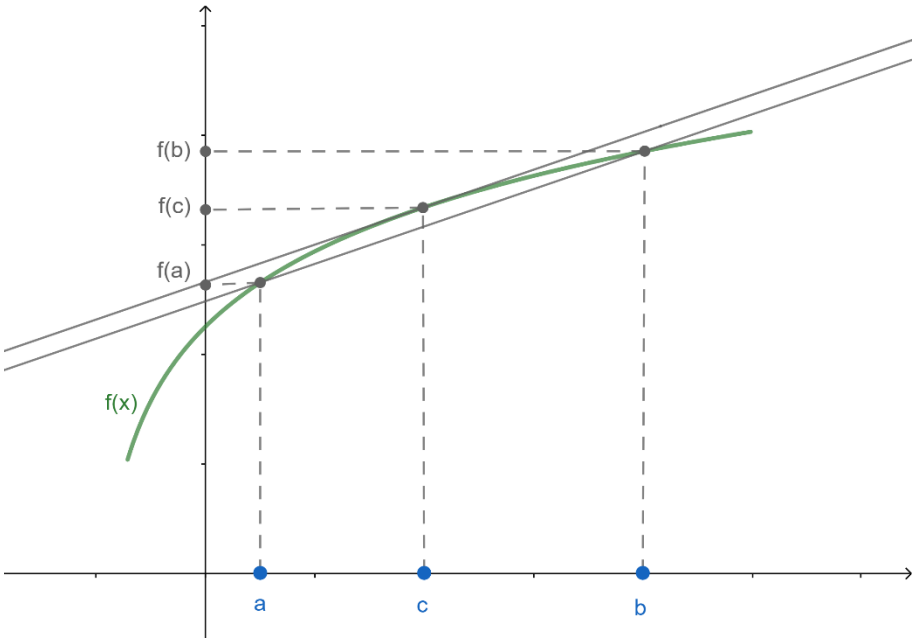


Obrázek 10

$$\boldsymbol{S = \int_{a}^{b} g(x)\, dx - \int_{a}^{b} f(x)\, dx.}$$

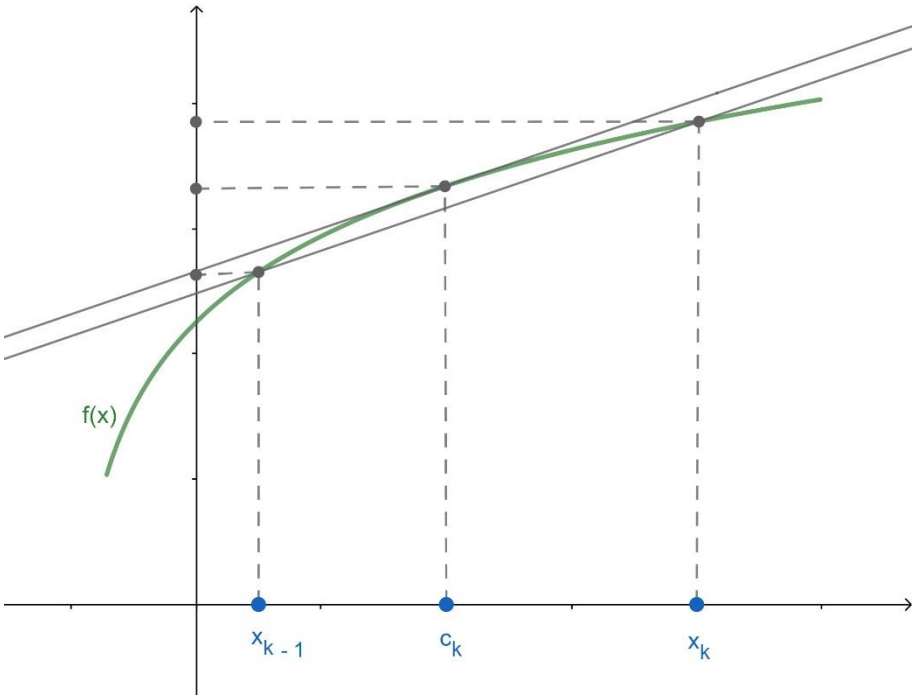
My ovšem budeme počítat určitý integrál pomocí tzv. Newton – Leibnizovy formule. Než si ale ukážeme tento předpis, musíme zmínit *Lagrangeovu větu*:
Pokud existuje spojitá funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$ a pro $\forall x \in (a; b)$ existuje vlastní nebo nevlastní derivace, pak existuje $c \in (a; b)$:

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$
$$\boldsymbol{(b - a) \cdot f'(c) = f(b) - f(a)}$$



Obrázek 11

Bod c je tedy tzv. optimální hodnotou, kdy derivací funkce f v bodě c prochází přímka (tečna ke grafu funkce), která má stejný směr jako přímka procházející krajními body.
Interval $\langle a; b\rangle$ můžeme rozdělit na n menších intervalů, přičemž pro každou část $\langle x_{k-1}; x_k\rangle$ tohoto intervalu bude taktéž existovat optimální hodnota c_k. Tomuto rozdělení říkáme dělení a značíme jej $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, kde pro každý interval zvolíme vhodnou hodnotu c_k, která je funkční hodnotou funkce $f(x)$. Tyto hodnoty c_k se nazývají norma dělení a značíme ji $V = \{c_1, c_2, \dots, c_k, \dots\ c_n\}$.



Obrázek 12

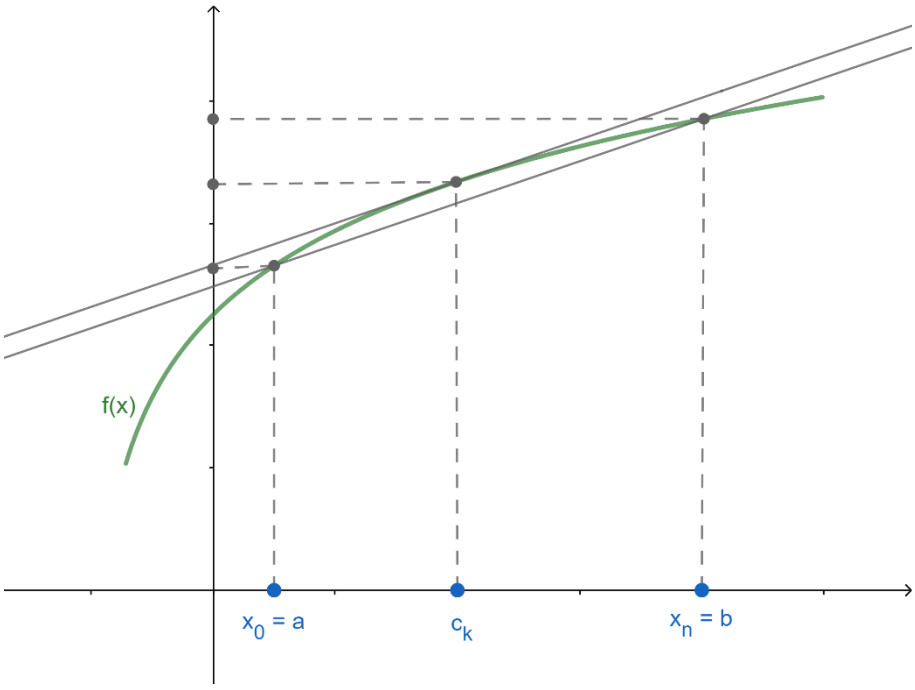
Nyní si již můžeme objasnit Newton – Leibnizovu formuli:

Nechť $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$ a $F(x)$ je na tomto intervalu spojitá. Potom platí *Newton – Leibnizova formule:*

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Pro toto tvrzení je nutno provést důkaz:

Prvním předpokladem je spojitost. Funkce $F(x)$ tuto vlastnost spojitosti splňuje z předpokladu Lagrangeovy věty – funkce $F(x)$ je spojitá a v každém bodě intervalu I existuje vlastní derivace, protože $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$.



Obrázek 13

Nyní můžeme dosadit do Lagrangeovy věty:

$$(b-a)\cdot f'(c) = f(b) - f(a)$$

$$(x_k - x_{k-1})\cdot F'(c_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}),$$

kde jsme získali předpis pro jeden obdélníček (malý interval), neboli Lagrangeovu větu pro konkrétní interval.

$$\big(F(x_1) - F(x_0)\big) + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \cdots + \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$$

Zde jsme vyjádřili Lagrangeovu větu pro celý interval $\langle a; b\rangle$. U tohoto zápisu si můžeme všimnout postupného odečítání členů na levé straně rovnosti (nastíněno modře u členu $F(x_1)$). Postupným odečítáním členů tedy dostaneme předpis:

$$\boldsymbol{F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} F'(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})}$$

$$\boldsymbol{F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1}).}$$

Pro přepis na finální úpravu si všímáme, že pravá strana je definicí Riemmanova integrálu. Tím získáváme Newton – Leibnizovu formuli:

$$\boldsymbol{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

3.2.2 Vztah určitého a neurčitého integrálu

Označme $F(x)$ takovou funkci, pro kterou $F'(x) = f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$.

Jestliže nyní existuje určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, platí pro vztah mezi určitým integrálem a funkcí $F(x)$ tzv. Newton-Leibnizova formule:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} = \text{(označujeme)}[\boldsymbol{F(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}.$$

3.2.3 Pravidla pro počítání určitého integrálu

Postupy popsanými v kapitole 3.1 najdeme primitivní funkci $F(x)$, do které pak na základě Newton-Leibnizovy formule dosadíme meze a, b. Vysvětleme si některé vlastnosti práce s integračními mezemi.

- Pokud zaměníme meze, dostaneme opačnou hodnotu.

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

Pro ukázku si uvedeme jednoduchý příklad.

Příklad: Vypočtěte $\int_1^4 2x\,dx$

$$\int_1^4 2x\,dx = [x^2]_1^4 = 4^2 - 1^2 = 15 \quad \blacksquare$$

Vypočítali jsme určitý integrál pro funkci $f(x) = 2x$ pro meze od $a = 1$ po $b = 4$. Nyní meze zaměníme, vypočítáme a porovnáme výsledky.

Příklad: Vypočtěte $\int_4^1 f(x)\,dx$

$$\int_4^1 f(x)\,dx = [x^2]_4^1 = 1^2 - 4^2 = -15 \quad \blacksquare$$

Výsledek určitého integrálu, u něhož jsme zaměnili meze, nám vyšel záporný, tzn. opačný.

- Pokud pro meze určitého integrálu a a b platí $a < c < b$, můžeme určitý integrál rozdělit na dva následujícím způsobem.

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Na jednoduchém příkladu si pravidlo opět vyzkoušíme.

Příklad: Vypočtěte $\int_3^5 4x\,dx$

$$\int_3^5 4x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5 = \frac{5^2}{2} - \frac{3^2}{2} = \frac{25-9}{2} = 8 \quad \blacksquare$$

Nyní si určitý integrál v mezích $\langle 3; 5\rangle$ rozdělíme na dva v mezích $\langle 3; 4\rangle$ a $\langle 4; 5\rangle$. Jak je vidět, podmínku splňujeme, protože $3 < 4 < 5$.

$$\int_3^5 4x\,dx = \int_3^4 4x\,dx + \int_4^5 4x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^5 =$$

$$= \left(\frac{4^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right) + \left(\frac{5^2}{2} - \frac{4^2}{2}\right) = \frac{16-9}{2} + \frac{25-16}{2} = \frac{7+9}{2} = 8 \quad \blacksquare$$

Jak je vidět, rozdělení mezí nijak neovlivňuje výsledek.

- Pokud o funkci $f(x)$ víme, že je nezáporná a spojitá v intervalu $\langle a; b\rangle$, platí, že i výsledek určitého integrálu bude nezáporný.

$$\boldsymbol{f(x) \geq 0, x \in \langle a; b\rangle \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0}$$

Názornou ukázkou nám bude funkce $f(x) = \frac{x}{2}$ v intervalu $\langle 1; 3\rangle$.

Příklad: Vypočtěte $\int_1^3 \frac{x}{2}\,dx$

$$f(x) = \frac{x}{2} \geq 0$$

$$\int_1^3 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^3 = \frac{3^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{9-1}{4} = 2 \geq 0 \quad \blacksquare$$

- Obdobou předchozího pravidla je i následující, které říká, že pokud máme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou na intervalu $\langle a; b\rangle$ spojité a zároveň platí, že $f(x) \geq g(x)$, pak i výsledek určitého integrálu v těchto mezích tuto vlastnost zachovává.

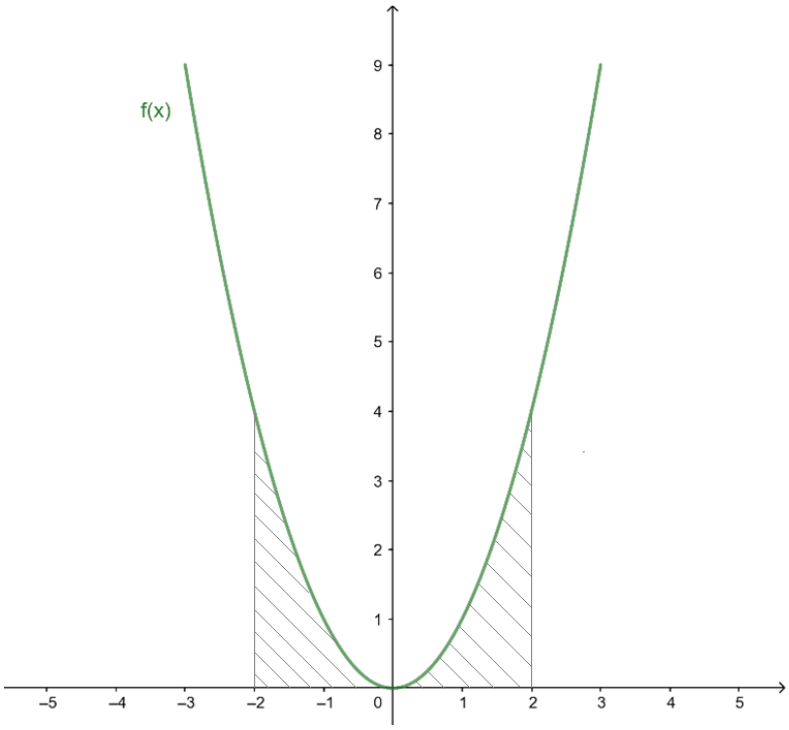
$$\boldsymbol{f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx}$$

- Další pravidla vyplývají z vlastností funkce.

  Pokud je funkce $f(x)$ v intervalu $\langle -a; a\rangle$ sudá, pak platí

$$\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.}$$

  Příkladem takové funkce je například $f(x) = x^2$ v mezích $\langle -2; 2\rangle$.

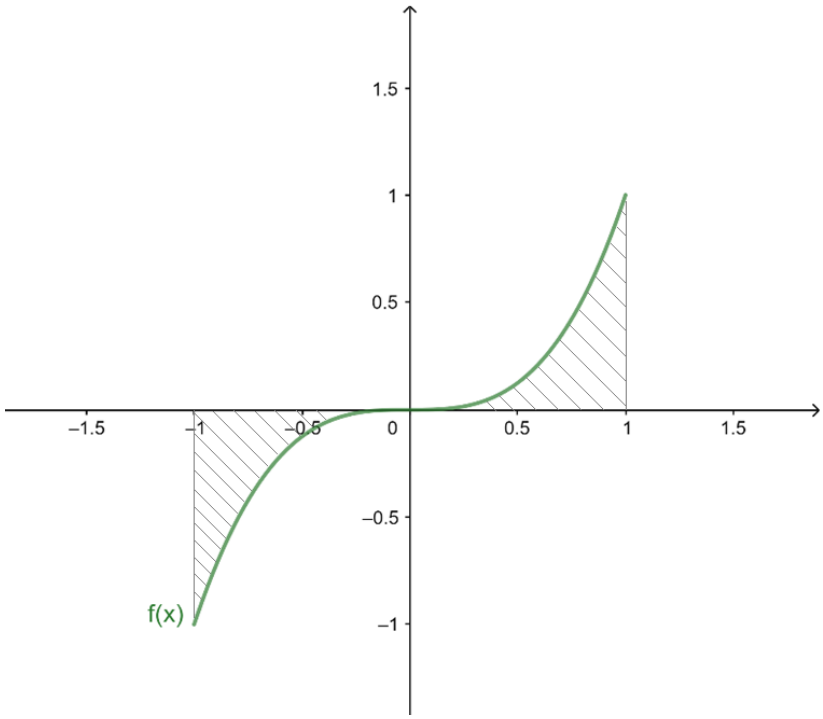


Obrázek 14

Pokud je funkce $f(x)$ v intervalu $\langle -a; a\rangle$ lichá, pak platí

$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx = 0}.$$

V tomto případě je příkladem liché funkce například $f(x) = x^3$ v mezích $\langle -1; 1\rangle$.



Obrázek 15

- Metoda per partes pro určitý integrál. Metodu využíváme úplně stejným způsobem jako při počítání neurčitého integrálu, jediným rozdílem je dosazení známých mezí a získání čísla jako výsledku.

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{u \cdot v'\,dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v\,dx}$$

Pro tuto metodu si uvedeme příklad.

Příklad: Vypočtěte $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x & v = -\cos x \\ u' = 1 & v' = \sin x \end{vmatrix} = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\, dx =$$

$$= [-x\cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi} = -\pi\cos\pi + 0 + \sin\pi - \sin 0 =$$

$$= -\pi(-1) + 0 + 0 - 0 = \pi \quad \blacksquare$$

- Metoda substituce pro určitý integrál. Ta funguje jako metoda per partes u určitého integrálu velice obdobně jako integrálu neurčitého. Jen si zde musíme dávat pozor, abychom nezapomněli přepočítat i meze, které rozhodně nezůstanou stejné!

$$\int_{a}^{b} f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \\ x = a \to t = \varphi(a) \\ x = b \to t = \varphi(b) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = F\big(\varphi(b)\big) - F(\varphi(a))$$

Může se zdát, že je tato metoda nejobtížnější právě díky přepočítávání, kde můžeme jednoduše udělat chybu. Proto je na místě, abychom si ji ukázali na konkrétním příkladu.

Příklad: Vypočtěte $\int_{-2}^{4}\sqrt{17+4x}\,dx$

$$\int_{-2}^{4}\sqrt{17+4x}\,dx = \begin{vmatrix} 17+4x = t \\ 4dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{4} \\ x = -2 \to \varphi(a) = 17 - 4\cdot 2 = 9 \\ x = 4 \to \varphi(b) = 17 + 4\cdot 4 = 33 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int_{9}^{33}\sqrt{t}\,dt =$$

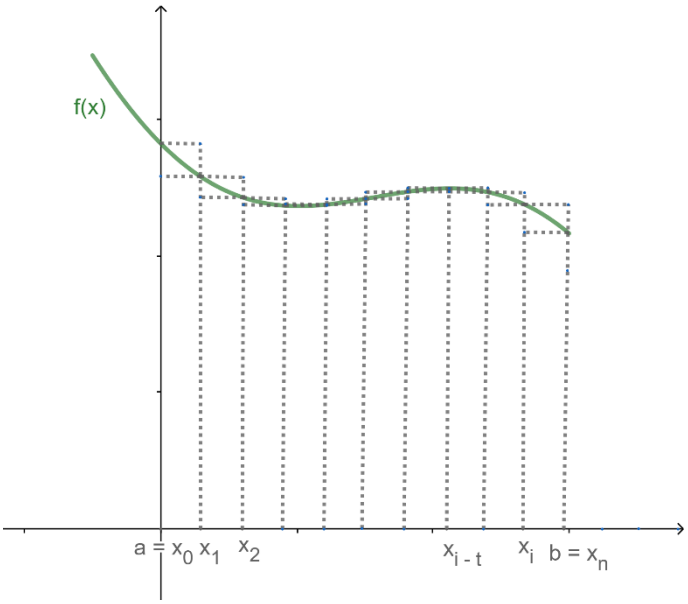
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_9^{33} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\sqrt{33^3} - \frac{2}{3}\sqrt{9^3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3\cdot 1331} - \frac{2}{3}\sqrt{(3^2)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{1331\cdot 3} - \frac{2}{3}\cdot 3^3\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3993} - 3^2\right) = \sqrt{2\cdot 3\cdot 163} \quad \blacksquare$$

3.2.4 Využití určitého integrálu

Kromě obsahu ploch lze určitý integrál použít i v dalších geometrických výpočtech, například při určování objemu rotačního tělesa nebo délky křivky. Podívejme se na některá z těchto využití.

Jako první si tedy ukážeme, do jakého vzorce musíme dosadit, abychom dokázali vypočítat objem jakéhokoli tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ kolem osy x.



Obrázek 16

$$\boldsymbol{V_{\Delta} = \sum_{1}^{n} \pi\left(f(x_i)\right)^2 (x_i - x_{i-1})}$$

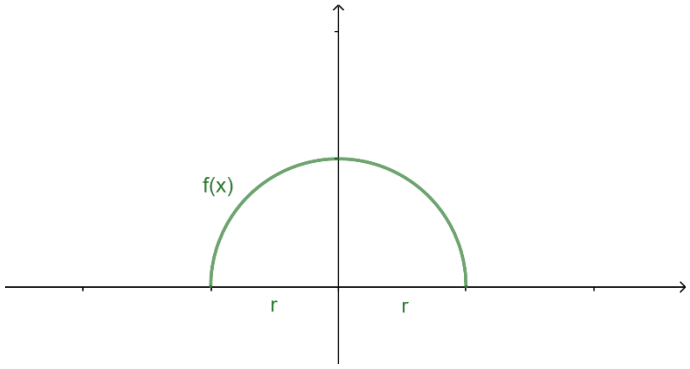
Podmínky: Limitním procesem pro $(x_i - x_{i-1}) \to 0$ dostaneme pro $f(x) \geq 0$, $f(x)$ je spojitá funkce,

$$\boldsymbol{V = \int_{a}^{b} \pi\,(f(x))^2 dx.}$$

Vzorec lze vysvětlit jako limitu součtu všech objemů válců, které vzniknou v daném intervalu, když jej rozdělíme na podintervaly délky $\Delta = \frac{b-a}{n}$ (přitom na každém z intervalů nahradíme funkci $f(x)$ konstantou $f(x_i)$). Rotací konstanty $f(x_i)$ na intervalu $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ vznikne malý váleček o výšce $\Delta = x_i - x_{i-1}$. Výraz V_{Δ} tedy představuje součet objemů všech těchto dílčích válečků.

Ze vzorce pro obsah kruhu $S = \pi r^2$ snadno vydedukujeme, že druhou mocninu poloměru kruhu ve vzorci pro výpočet objemu rotačního tělesa nahrazuje druhá mocnina funkce $f(x)$. Důvodem je měnící se poloměr právě podle dané funkce $f(x)$. Interval, ve kterém počítáme objem rotačního tělesa, reprezentuje výšku tohoto tělesa.

Nyní si tedy vypočítáme předpis pro výpočet objemu koule o poloměru r.



Obrázek 17

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Rotací této funkce v trojrozměrném prostoru kolem osy x vznikne sférická plocha, a množina všech bodů uvnitř této sféry a na ní se nazývá koule. Určeme objem této koule.

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi \left[\left(r^2 r - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right] =$$

$$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \blacksquare$$

A jako poslední si ukážeme, proč se obsah kruhu o poloměru r počítá právě rovnicí $S = \pi r^2$. Použijeme tutéž funkci, se kterou jsme pracovali v předchozím příkladu, pouze spočteme obsah jejího podgrafu (polovinu obsahu kruhu) a vynásobíme dvěma:

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$S = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Použijeme metodu substituce.

$$S = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} x = r \sin t \\ dx = r \cos t\, dt \\ r \to \sin t = \frac{\pi}{2} \\ -r \to -\sin t = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (\sin t \cdot r)^2} \cdot r \cos t\, dt =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt = 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = r^2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= r^2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = r^2\pi \quad \blacksquare$$

Jako fyzikální význam si uvedeme obecný výpočet uražené dráhy objektu, pokud známe jeho rychlost.

$$\boldsymbol{\int_a^b v(t)\,dt = [x(t)]_a^b = x(b) - x(a)}$$

Pro názornou ukázku na konkrétním příkladu použijeme předpis funkce pro rychlost objektu $v(t) = 3t + 1$, která je naměřena v jednotkách $m \cdot s^{-1}$, a chceme spočítat dráhu, kterou objekt urazil od první po osmou vteřinu. Náš výpočet bude tedy vypadat:

$$x(8) - x(1) = \int_1^8 (3t+1)\,dt = \left[\frac{3t^2}{2} + t\right]_1^8 = \left(\frac{3\cdot 8^2}{2} + 8\right) - \left(\frac{3}{2} + 1\right) =$$

$$= \frac{3\cdot 64}{2} + 8 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{203}{2}m \quad \blacksquare$$

3.2.5 Příklady

V prvním příkladu si procvičíme metodu per partes.

Příklad: Vypočtěte $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$

$$\int_1^e x^3\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v = \frac{x^4}{4} \\ u' = \frac{1}{x} & v' = x^3 \end{vmatrix} = \left[\ln x\cdot\frac{x^4}{4}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}\,dx =$$

$$= \left[\ln x\cdot\frac{x^4}{4}\right]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,dx = \left[\ln x\cdot\frac{x^4}{4}\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_1^e =$$

$$= \ln e\cdot\frac{e^4}{4} - \ln 1\cdot\frac{e^4}{4} - \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1^4}{4}\right) = \frac{3e^4+1}{16} \quad \blacksquare$$

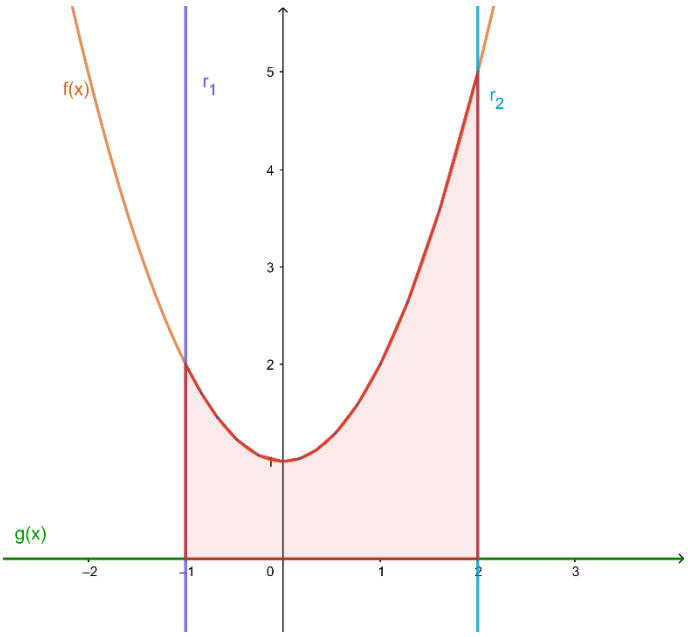
Ve druhém příkladu máme vypočítat obsah obrazce, který je zadaný křivkami. Pro názornost se můžeme podívat na graf funkcí, abychom lépe rozpoznali, která funkce nám útvar ohraničuje a které funkce nám znázorňují meze.

$f(x) = x^2 + 1$

$g(x) = 0$

$r_1 = -1$

$r_2 = 2$



Obrázek 18

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} + 2 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right) = 6j^2 \quad \blacksquare$$

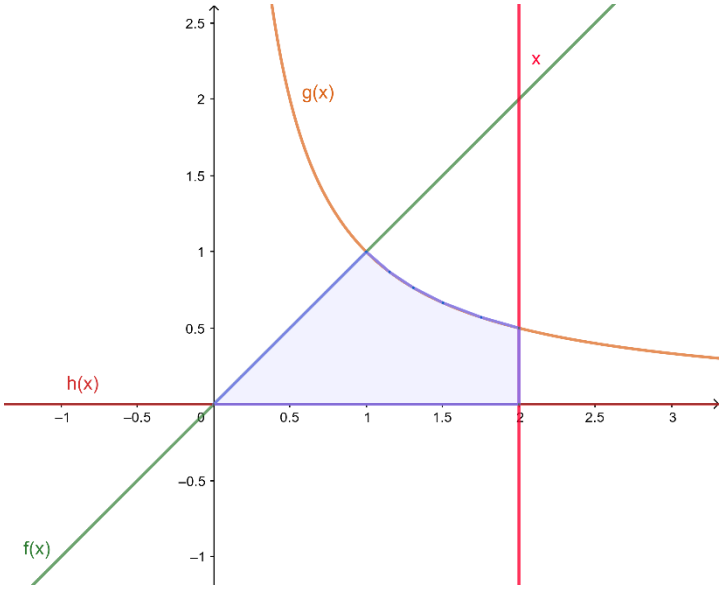
Ve třetím příkladu si zkusíme vypočítat příklad na objem tělesa, jehož zadání bude taktéž, jako v předchozím případě, zadáno pomocí křivek. Těleso vznikne, pokud necháme obrazec v rovině ohraničený zadanými křivkami rotovat kolem osy *x*.

$f(x) = x$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = 0$

$x = 2$



Obrázek 19

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx = \pi \int_0^1 (x)^2\, dx + \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \pi \cdot \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 =$$

$$= \pi \frac{1}{3} + \pi \left[\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \frac{5\pi}{6} j^3 \quad \blacksquare$$

4. Fyzikální část

4.1 Pohyb a jeho vlastnosti

Všechno kolem nás je v neustálém pohybu. Typickou a často pokládanou otázkou je, který ze dvou pozorovaných objektů se hýbe a který zůstává v klidu, popřípadě, zda se pohybují oba současně. Můžeme tedy konstatovat, že pohyb je relativní.

Jistě všichni známe příklad, kdy stojí dva vlaky vedle sebe a jeden z nich se začne rozjíždět. Pokud sedíme v jednom z těchto dvou vlaků a vidíme jen ten protější, nedokážeme rozhodnout, zda se rozjel právě ten, ve kterém se nacházíme, či ten druhý. Naopak, pokud bychom stáli na nástupišti jako externí pozorovatelé, bychom viděli hned, který vlak se rozjel.

Jako druhý příklad bych ráda uvedla vztah mezi Zemí a Sluncem či člověkem stojícím na konkrétním místě na planetě a Měsícem. Mnohá staletí se lidé přeli a přesvědčovali ostatní o tom, že středem vesmíru je naše planeta a i Slunce se točí kolem ní. Toto tvrzení bylo tak silným dogmatem, že jiný názor nebyl připuštěn a lidé s odlišnými názory byli popravováni.

Z fyzikálního hlediska můžeme pohyby dělit např. podle trajektorie, porovnávat mezi sebou a popisovat je. Touto problematikou se zabývá oblast fyziky zvaná kinematika.

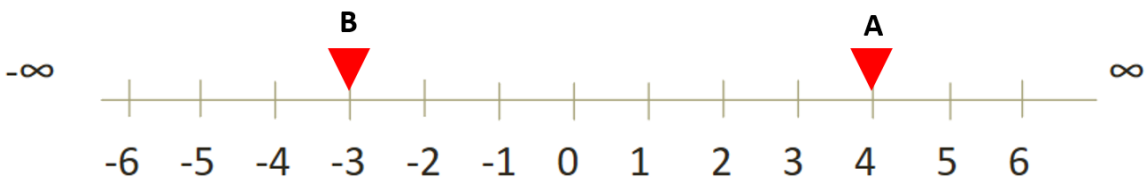
Přímočarý pohyb se vyznačuje svojí trajektorií tvaru přímky. Ta může být různě nakloněná vzhledem k dalším objektům, ale u přímočarého pohybu objektu je jeho trajektorií část přímky.

Objekt, který se pohybuje, nahradíme bezrozměrným bodem, který se nazývá hmotný bod. Tohoto pojmu můžeme využít v případech, pokud na rozměrech, hmotnosti, či tvaru tělesa nezávisí daný pohyb. Podmínkou je skutečnost, kdy všechny body tělesa se pohybují výhradně stejným směrem a procházejí tutéž trajektorii. Synonymem pro pojem hmotný bod může být další termín částice nebo termín bodový objekt.

4.2 Poloha a posunutí

Pro výpočet délky trajektorie, kterou se daný objekt posune, potřebujeme nejprve učit, kde se objekt nacházel před posunutím. Tuto polohu budeme určovat k tzv. vztažnému bodu, což v našem případě je nulový, nebo také počáteční bod souřadnicové osy (osa x).

Na této ose rozpoznáváme také dva směry. Kladný a záporný. Kladný směr je takový, kde se nacházejí větší hodnoty vzdálenosti od počátečního bodu. Příkladem může být objekt A, který se nachází 4 m od počátku. Naopak záporným směrem se rozumí takový, kde se nacházejí menší hodnoty vzdálenosti od počátečního bodu. Příkladem pro tento směr je objekt B nacházející se -3 m od počátku. Pro představu polohy objektů A a B poslouží následující obrázek.



Obrázek 20

V případě, že by bod A na ose výše znázorňoval původní polohu pozorovaného objektu a bod B na též ose konečnou polohu pozorovaného objektu, můžeme vypočítat délku trajektorie tohoto objektu pomocí vztahu:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

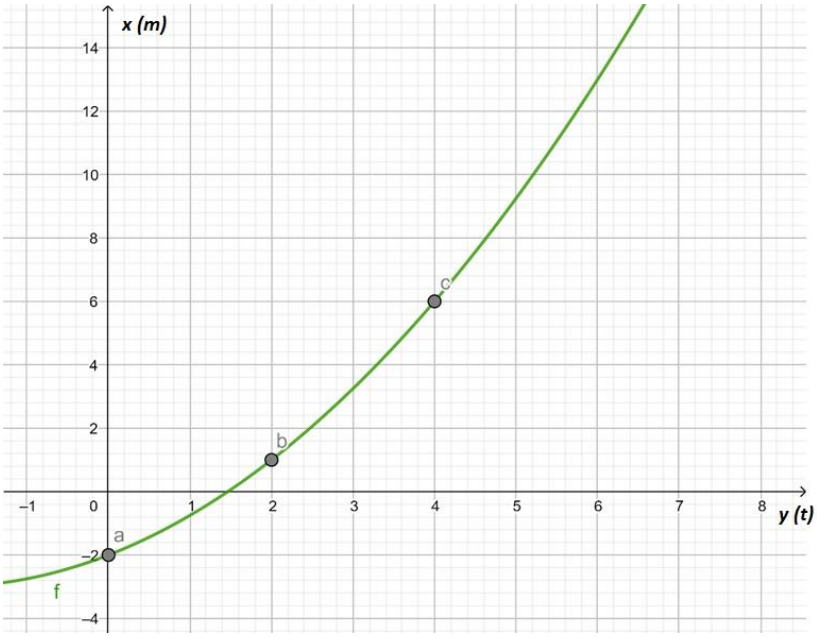
… a zjistíme, že Δ x = -3 – 4 => Δ x = -7. Vyšla nám záporná hodnota, což znamená, že se objekt posunul v záporném směru. Z výsledku, který by byl kladný, by bylo jasné, že se objekt posunul v tomto případě v kladném směru.

Pokud nám nezáleží na směru posunu daného objektu, tzn., nezáleží nám na znaménku, mluvíme o velikosti posunutí | Δ x |. Velikost posunutí je vždy nezáporná.

4.3 Průměrná rychlost a průměrná velikost rychlosti

Průměrná rychlost je skalární veličina a máme možnost ji vypočítat podle následujícího vzorce pomocí grafu nebo zadaných hodnot.

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



Obrázek 21

Na výše uvedeném grafu můžeme vidět závislost dráhy na čase, ze kterého dokážeme snadno vypočítat průměrnou rychlost. Jelikož se jedná o graf funkce, je nám jasné, že se budeme zabývat pouze částí grafu, která leží v kladných hodnotách vodorovné osy – t.

Vidíme, že v čase 0 s byl objekt umístěn -2 m od počátku (bod a), v čase 2 s byl objekt posunut do vzdálenosti 1 m od počátku (bod b) a v čase 4 s byl objekt posunut do vzdálenosti 6 m od počátečního bodu (bod c). V čase 0 s posun objektu započal, v čase 4 s posun objektu skončil. Průměrná rychlost je dána směrnicí přímky procházející body, kdy posun započal a skončil.

Podle vzorečku spočítáme průměrnou rychlost:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{6-(-2)}{4-0} = \frac{8}{4} = 2\ m\,.\,s^{-1}.$$

Další veličinou je průměrná velikost rychlosti $\overline{v}$. Ta je již skalární veličina a je určena celkovou dráhou, kterou urazí pozorovaný objekt. Vypočítat ji můžeme pomocí vzorce:

$$\overline{v} = \frac{\textbf{celková uražená dráha}}{\textbf{celková doba pohybu}}.$$

4.4 Okamžitá rychlost

Okamžitá rychlost se též nazývá pouze rychlost a vyjadřuje danou rychlost, kterou se určitý objekt v daném okamžiku pohybuje. Tato veličina je vektorová, protože patří mezi veličiny, již mají vlastnost udávat směr pohybu částic. Značíme ji v_x.

Okamžitou rychlost vypočítáme pomocí vztahu:

$$\boldsymbol{v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}},$$

kde spočítáme limitu tak, že Δt (= časový interval, ve kterém se objekt pohybuje) budeme zkracovat až na 0. Pak se průměrná rychlost, pro kterou platí interval od t do $t + \Delta t$, blíží limitní hodnotě. V podstatě se dostaneme na limitní interval od t do $t + 0 \to t$, což je daný konkrétní moment.

Definice okamžité rychlosti vyjádřená matematicky: Jedná se o směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$.

4.4.1 Velikost okamžité rychlosti

Velikost okamžité rychlosti nebo jen velikost rychlosti na rozdíl od okamžité rychlosti je již veličina skalární, neboť nám nepodává informaci o směru pohybu určitého objektu. V praxi to znamená, že u velikosti okamžité rychlosti nám nezáleží na znaménku, které se u okamžité rychlosti vyskytuje a je pro tuto veličinu velmi důležité právě z důvodu určení směru.

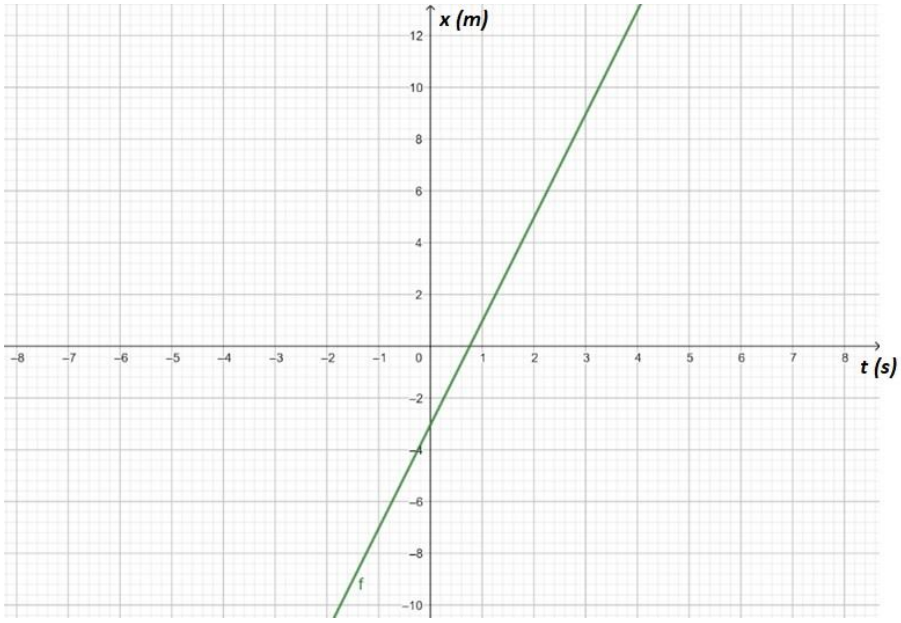
4.4.2 Případy závislosti pozorovaného objektu na čase

Závislost polohy na čase je znázorněna v rovině funkcí dvou proměnných. Popisujeme vlastně přímočarý pohyb objektu na ose x. Následující tři případy nastiňují některé možné situace, jež mohou u okamžité rychlosti nastat. Pro lepší představu jsou zvoleny konkrétní předpisy. Zajímá nás časový interval $t > 0$.

Značení os: x – svislá osa … poloha (m),

t – vodorovná osa… čas (s)

a) $x = 4t - 3$

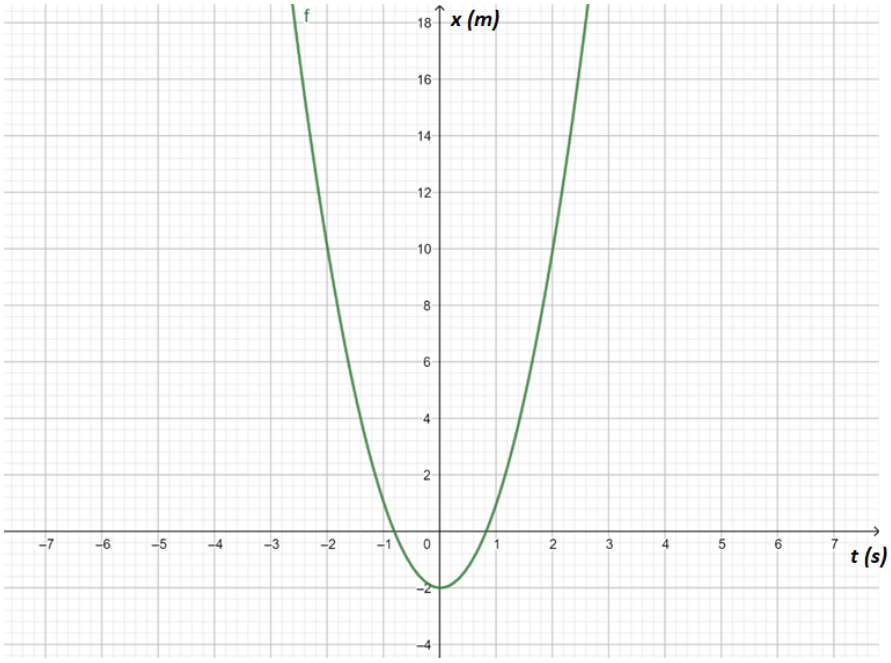


Obrázek 22

U prvního grafu funkce je nám hned již z předpisu jasné, že se jedná o lineární funkci, která je rostoucí. Jednoduchým výpočtem, či dokonce úvahou lze zjistit, že se objekt začal pohybovat 3 metry před počátkem souřadné soustavy. Zde je důležité si uvědomit, že nás zajímá jen ta část grafu, již tvoří kladné hodnoty času, pokud se nebavíme o speciálních případech, kdy dáváme někomu náskok. Naopak pro polohu (svislá osa) lze uvažovat i záporné hodnoty.

Poloha objektu se bude úměrně měnit v závislosti na čase, rychlost bude konstantní.

b) $x = 3t^2 - 2$

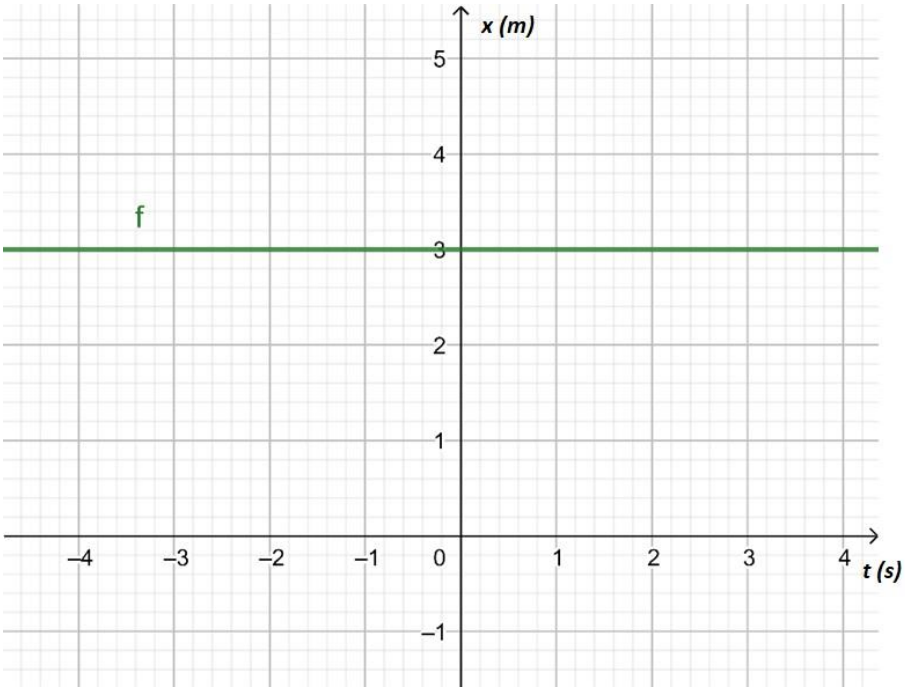


Obrázek 23

U druhého grafu funkce se jedná o funkci kvadratickou, která je v intervalu $\langle 0; \infty)$, který nás zajímá, taktéž rostoucí. Poloha objektu v závislosti na čase se zde bude měnit kvadraticky, rychlost objektu se bude zvyšovat a nikdy se nestane konstantní.

Kdyby nás zajímal pohyb pro záporná i kladná t, tak při záporných hodnotách t blížících se k nule se objekt pohybuje směrem dolů po ose x, a nejdále se dostane do polohy $x_0 = -2$, a pak se objekt začne pohybovat zpět so kladných poloh osy x.

c) $x = 3$



Obrázek 24

U posledního grafu se evidentně jedná o konstantní funkci. To znamená, že se objekt nachází v tomto konkrétním případě v poloze 3 metry od startu, jež se nemění, a tudíž se daný objekt nepohybuje (= rychlost je nulová).

Většinu úvah při popisu přímočarého pohybu lze zobecnit na pohyb v trojrozměrném prostoru, kde jsou rovnice popisu polohy, rychlosti a zrychlení v závislosti na čase prakticky stejné, jen vektorové. Každou rovnici lze pak tudíž psát pro každou souřadnici zvlášť. Odtud tedy označení v_x, a_x, což znamená rychlost / zrychlení objektu ve směru osy x.

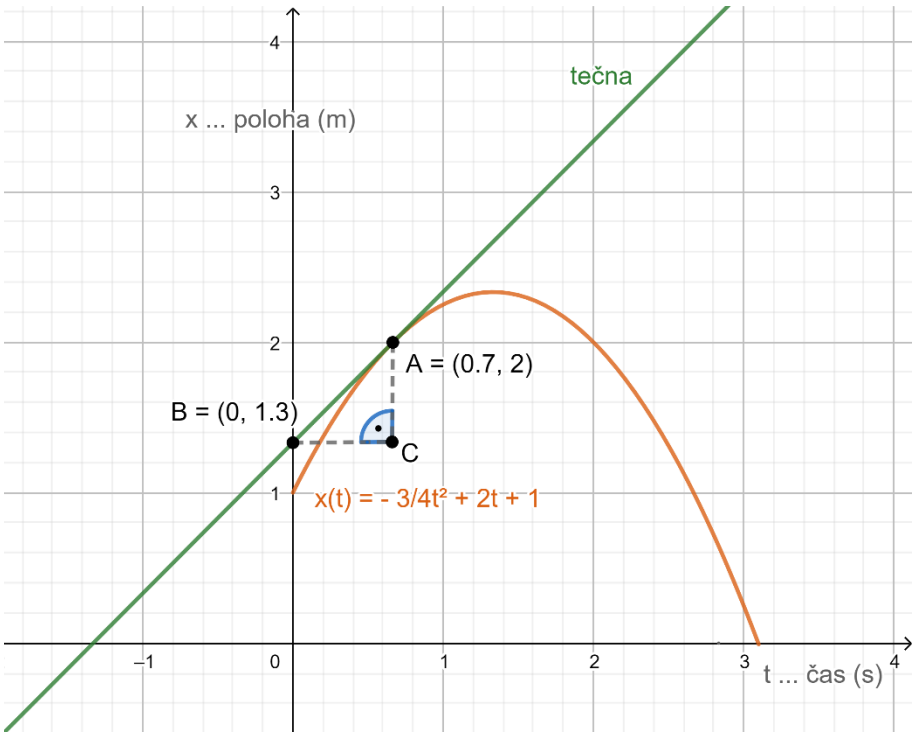
4.4.3 Příklad

Na tomto příkladu si ukážeme dva způsoby, jak vypočítat okamžitou rychlost daného objektu z grafu funkce.

Příklad: Pohyb objektu je znázorněn grafem funkce v obr. 21. Vypočítejte okamžitou rychlost tohoto objektu v čase $t = 0{,}7\ s$.

Víme, že směrnice tečny v určitém bodě ke křivce nastiňující pohyb objektu vyjadřuje okamžitou rychlost objektu a známe i vzorec pro její výpočet, čímž získáme první možnost výpočtu.

Zároveň je nám známo, že okamžitou rychlost můžeme vypočítat jako první derivaci funkce polohy objektu $x(t)$ podle času t. To pro nás bude druhá možnost pro výpočet řešení.



Obrázek 25

Náš první návrh na výpočet se týkal směrnice tečny funkce. V našem případě máme vypočítat okamžitou rychlost objektu v bodě A, jehož souřadnice vidíme v grafu. Při výpočtu směrnice tečny si pomůžeme pravoúhlým trojúhelníkem, který prochází body A a B. Z tohoto trojúhelníku vypočítáme Δx jako $\Delta x = 2 - 1{,}3 = 0{,}7$ a Δt vypočítáme jako $\Delta t = 0{,}7 - 0 = 0{,}7$. Zbývá nám jen dosadit do vzorce:

$$v_x = směrnice\ tečny = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}7}{0{,}7} = 1\ m/s.$$

Druhou variantou výpočtu je použití první derivace podle času. My máme předpis funkce $x(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 2t + 1$. Podle vzorce tedy počítáme:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{4}t^2 + 2t + 1\right) = -\frac{3}{4} \cdot 2t + 2 + 0 = -\frac{3}{2}t + 2.$$

Pro $t = 0{,}7\ s$:

$$v_x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{10} + 2 = \frac{-21 + 40}{20} = \frac{19}{20} \doteq 1\, m/s\,. \quad \blacksquare$$

4.5 Zrychlení

Pokud řekneme, že se objekt či daná částice pohybuje se zrychlením, znamená to, že se vektor rychlosti neboli okamžitá rychlost objektu nebo částice mění postupem času.

Pro popis pohybu zrychleného využijeme dvě veličiny zrychlení: průměrné zrychlení $\overline{a_x}$ a okamžité zrychlení a_x. Jednotkou jak průměrného zrychlení, tak zrychlení okamžitého je m/s^2, ale používají se i jiné, například km/h^2, cm/s^2, apod.

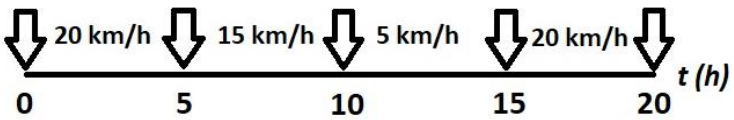
Průměrné zrychlení $\overline{a_x}$ je v daném časovém intervalu Δt vyjádřeno vztahem:

$$\overline{\boldsymbol{a_x}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v_x}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{v_{2x}} - \boldsymbol{v_{1x}}}{\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1}}.$$

Okamžité zrychlení a_x (nebo jenom zrychlení) vypočítáme jako derivaci rychlosti podle proměnné t.

$$\boldsymbol{a_x} = \frac{\boldsymbol{dv_x}}{\boldsymbol{dt}}$$

Rozdíl mezi těmito dvěma veličinami je jistě zjevný. Průměrné zrychlení pohybu daného objektu je bráno z počátečních a konečných hodnot rychlosti a času tohoto pohybu. Naopak okamžité zrychlení se ptá na změnu rychlosti v daném okamžiku pohybovaného objektu. Veličina průměrné zrychlení může v mnoha případech zkreslovat druh daného pohybu, neboli hodnota průměrného zrychlení vůbec nevypovídá o tom, jak se zrychlení měnilo v průběhu pohybu daného objektu. Jako příklad si uvedeme pohyb auta, které měnilo rychlost následujícím způsobem:



Obrázek 26

Podle vzorečku jednoduše vypočítáme průměrné zrychlení:

$$\overline{a_x} = \frac{20\,km/h - 20\,km/h}{20\,h - 0\,h} = 0\ km/h^2.$$

Jestliže bychom ovšem dostali jako základ příkladu pouze informaci o průměrném zrychlení, což v našem případě je $0\ km/h^2$, mohli bychom se domnívat, že auto v průběhu pohybu svou rychlost vůbec nezměnilo. Z tohoto poznatku vyplývá, že o tom, zda se jedná o rovnoměrný přímočarý zrychlený, zpomalený či nerovnoměrný pohyb, veličina průměrné zrychlení nerozhoduje.

Zrychlení v daném okamžiku je rovno směrnici tečny ke křivce $v_x(t)$ v bodě, který je tímto okamžikem určen. Pokud dosadíme do rovnice zmíněné viz výše, dostaneme vztah:

$$\boldsymbol{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}},$$

který vyjadřuje skutečnost, že zrychlení hmotného bodu / objektu / částice udává druhá derivace polohy x podle času t.

4.5.1 Příklady

Příklad: Vypočítejte zrychlení objektu, je – li jeho pohyb vyjádřen pomocí předpisu pro okamžitou rychlost $v_x(t) = 2t^2 + t - 2$.

Podle vzorce $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ vidíme, že zrychlení vypočítáme jako první derivaci okamžité rychlosti objektu podle času.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 + t - 2) = 2t + 1\,m/s^2 \quad \blacksquare$$

Příklad: Vypočítejte zrychlení objektu, je – li jeho pohyb vyjádřen pomocí předpisu pro polohu $x(t) = 3t^2 - 2t + 4$.

V tomto případě se jedná o druhou derivaci podle času. My budeme derivovat postupně.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 2t + 4) = 6t - 2\,m/s$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(6t - 2) = 6\,m/s^2 \quad \blacksquare$$

4.6 Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Jednoduše řečeno, pokud se o nějakém pohybu vyjádříme, že se jedná o rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb, znamená to, že zrychlení objektu daného pohybu je konstantní.

Jistě je nám jasné, že 100% konstantnost zrychlení je přítomna pouze u ideálních modelů. V běžném životě se ovšem ke konstantnosti můžeme alespoň částečně přiblížit a uvést jako příklady rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu následující situace: rozjíždění vlaku, autobusu, auta, či kola.

Obecně lze říci, že při rovnoměrném zrychleném přímočarém pohybu je okamžité zrychlení shodné s průměrným zrychlením, proto platí:

$$\boldsymbol{a_x = \overline{a_x} = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}},$$

kde v_{0x} vyjadřuje rychlost v okamžiku $t = 0$ (počáteční rychlost) a v_x značí rychlost v libovolném čase.

Postupnými úpravami získáme vzorec pro průměrnou rychlost.

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x} + a_x t}$$

Obdobně lze vyjádřit vztah pro průměrnou rychlost:

$$\boldsymbol{\overline{v_x} = \frac{x - x_0}{t - 0}},$$

odkud lze odvodit vzorec pro polohu objektu:

$$\boldsymbol{x = x_0 + \overline{v_x} t}.$$

Průměrnou rychlost rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu lze definovat jako aritmetický průměr počáteční v_{0x} a koncové v_x rychlosti.

$$\boldsymbol{\overline{v_x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)}$$

Pokud za v_x dosadíme $v_x = v_{0x} + a_x t$, získáme:

$$\overline{v_x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t) \rightarrow \boldsymbol{\overline{v_x} = v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t}.$$

Po dosazení $\overline{v_x} = \frac{x - x_0}{t - 0}$ získáme:

$$\frac{x - x_0}{t} = v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t$$

$$\boldsymbol{x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2}.$$

Pokud bychom pracovali s rovnicemi $v_x = v_{0x} + a_x t$ a $x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$, získali bychom vylučováním určité veličiny 3 vztahy:

- jako první vyloučíme veličinu t a získáme:

$$\boldsymbol{v_x^2 = v_{0x}^2 + 2 a_x (x - x_0)}$$

- jako druhé vyloučíme veličinu okamžité zrychlení a_x a získáme:

$$\boldsymbol{x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) t}$$

- jako třetí vyloučíme veličinu počáteční rychlost objektu v_{0x} a získáme:

$$\boldsymbol{x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2}.$$

4.6.1 Příklad

Příklad: Řidič spatří policejní vůz a začne rovnoměrně brzdit. Na dráze 88 m zpomalí z rychlosti $v_x(0) = 75\,km/h$ na $v_x(t) = 45\,km/h$. Určete:

a) zrychlení a_x automobilu.

b) jak dlouho řidič v této fázi brzdil?

c) jakou dráhu urazí řidič od počátku brzdění (tj. včetně těch 88 m) až do úplného zastavení, pokud stále jede rovnoměrně zpomaleným pohybem?

a) Výpočet a_x:

Dráha $x - x_0 = 88\,m = 0{,}088\,km$

Využijeme rovnice:

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x} + a_x t} \rightarrow 45 = 75 + a_x t \rightarrow a_x = \frac{-30}{t}$$

$$\boldsymbol{x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2} \rightarrow 0{,}088 = 75t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{30}{t}\right) \cdot t^2 \rightarrow 0{,}088 = 75t - 15t \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}088 = 60t \rightarrow t = 1{,}4667 \cdot 10^{-3}\,h$$

$$a_x = \frac{-30}{t} \rightarrow a_x = \frac{-30}{1{,}4667 \cdot 10^{-3}} \rightarrow a_x = -20\,454{,}545\,km/h =$$

$$= -5\,681{,}818\,m/s \quad \blacksquare$$

Odpověď: Zrychlení osobního automobilu bylo $a_x = -5\,681{,}818\,m/s$.

b) Výpočet doby brždění na dráze 88 m:

Využijeme rovnice:

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x} + a_x t} \rightarrow 45 = 75 + a_x t \rightarrow a_x = \frac{-30}{t}$$

$$\boldsymbol{x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2} \rightarrow 0{,}088 = 75t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{30}{t}\right) \cdot t^2 \rightarrow 0{,}088 = 75t - 15t \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}088 = 60t \rightarrow t = 1{,}4667 \cdot 10^{-3}\,h = 5{,}2799\,s \quad \blacksquare$$

K výsledku jsme se dopočítali již v rámci první podúlohy.

Odpověď: Řidič brzdil na dráze 88 m po dobu $t = 5{,}28s$.

c) Výpočet dráhy x od začátku zpomalování až do úplného zabrzdění:

V průběhu výpočtů využijeme vypočítaných hodnot z předchozích podúloh.

Využijeme rovnice:

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x} + a_x t} \rightarrow 0 = 75 - 20\,454{,}545 \cdot t \rightarrow t = 3{,}667 \cdot 10^{-3}\,h = 13{,}2\,s$$

$$\boldsymbol{x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2} \rightarrow 0 - x_0 = 75 \cdot 3{,}667 \cdot 10^{-3} - 20\,454{,}545 \cdot \frac{(3{,}667 \cdot 10^{-3})^2}{2}$$

$\rightarrow x_0 = 0{,}1375\ km = 137{,}5\ m$ ■

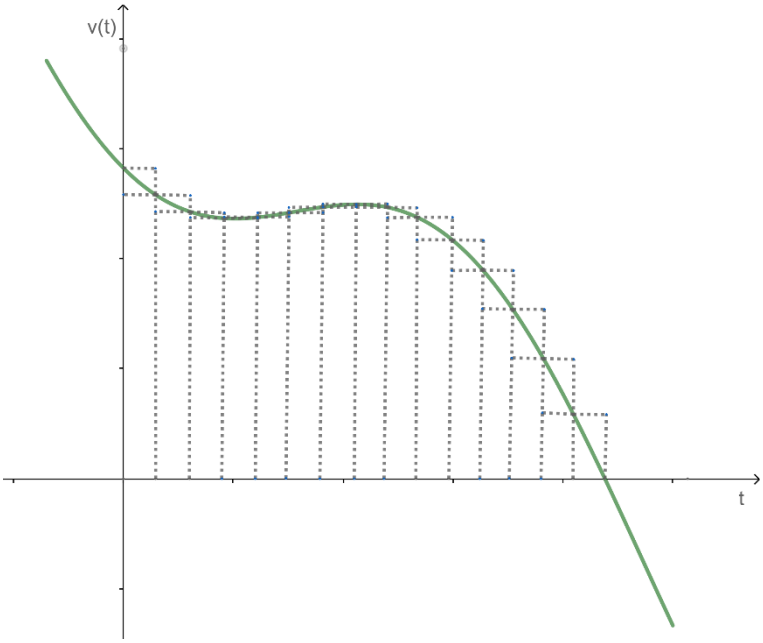
Odpověď: Řidič urazí od počátku brzdění až do úplného zastavení dráhu $x = 137{,}5\ m$.

4.7 Grafické integrování při analýze pohybu

Pro grafickou analýzu pohybu můžeme využít matematickou operaci určitého integrálu.

Určitý integrál je velice podobný integrálu neurčitému. Jsou však mezi nimi určité rozdíly a ty si postupně popíšeme. Podmínka, která ovšem stále zůstává, je spojitost funkce na intervalu I.

U neurčitého integrálu jsme jako výsledek získali vždy předpis primitivní funkce $F(x)$ k dané funkci $f(x)$. U určitého integrálu bude výsledkem číslo. Jak se tak stane? U určitého integrálu máme zadané tzv. meze, ve kterých chceme integrál vypočítat. Příkladem nám může být následující graf, na kterém je zaznamenána rychlost objektu v daném časovém intervalu.



Obrázek 27

Z tohoto grafu bychom dokázali právě pomocí určitého integrálu hravě spočítat, jakou dráhu objekt urazil, pokud by nám byly známy jednotlivé hodnoty času a rychlosti. Z fyziky jistě známe velmi jednoduchý vzorec pro výpočet dráhy $s = v \cdot t$, který každý z nás určitě nespočetněkrát počítal. I když se to nezdá, tento vzorec dokáže být relevantní

pouze za předpokladu, že se jedná o konstantní rychlost. V našem případě se tak ovšem neděje, a proto se uchýlíme k jiné variantě výpočtu. Jak je nastíněno v obrázku, pomůže nám rozdělit si osu *t* na menší úseky, na kterých nahradíme proměnnou funkci *v(t)* konstantní hodnotou – pak na daném úseku dostaneme konstantní rychlost, a můžeme užít vzorec $s = v \cdot t$. Jednotlivé hodnoty dílčích drah poté spolu jen sečteme, a pro dostatečně jemné dělení osy *t* se přiblížíme k určení celkové uražené dráhy, což je naším cílem.

Otázkou zůstává, jakou konstantní hodnotou na daném interválku máme funkci $v(t)$ nahradit. Z obdélníčků, které jsou v našem grafu, je patrné, že u každého z nich získáme vždy dvě hodnoty – maximum a minimum. Možnou hodnotu výšky daného obdélníku tedy získáme vypočtením průměru (sečteme tato dvě čísla a vydělíme dvěma). I to je důvodem sestrojit vždy co nejmenší obdélníky, právě proto, abychom získali co nejmenší rozdíly mezi maximem a minimem.

Ještě bych se ráda vrátila k již zmíněnému vzorci pro dráhu, kterou objekt urazil $s = v \cdot t$. Jestliže se pozorně podíváme do grafu, kde nám vodorovná osa značí uplynulý čas a svislá osa značí rychlost objektu, jistě si hned uvědomíme, že počítáním součinů hodnot z vodorovné i svislé osy pro dané obdélníky, získáme právě jejich obsah.

Nyní si na závěr vyjádříme vztahy pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb pomocí určitého integrálu.

Jako první budeme vycházet ze vztahu pro okamžité zrychlení, o kterém víme, že je definované vztahem $a_x = \frac{dv_x}{dt}$. Ten lze přepsat do tvaru určitého integrálu:

$$\boldsymbol{v_{1x} - v_{0x} = \int_{t_0}^{t_1} a_x dt,}$$

kde v_{1x} značí rychlost v čase t_1 a v_{0x} značí rychlost v čase t_0. Vypočítáme vlastně obsah plochy mezi křivkou $a_x(t)$ a časovým intervalem $t \in \langle t_0; t_1 \rangle$, jestliže budeme mít k dispozici graf závislosti okamžitého zrychlení na čase $a_x(t)$.

Identickým způsobem si odvodíme vzorec pro polohu objektu x. Vycházet v tomto případě budeme ze vztahu $v_x = \frac{dx}{dt}$ a přepisem do tvaru určitého integrálu získáme vztah:

$$\boldsymbol{x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v_x dt,}$$

kde x_1 značí polohu objektu v čase t_1 a x_0 značí polohu objektu v čase t_0. V tomto případě vypočítáme obsah plochy mezi křivkou $v_x(t)$ a časovým intervalem $t \in \langle t_0; t_1 \rangle$, pokud budeme znát graf závislosti okamžité rychlosti na čase $v_x(t)$.

Pro popis rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu můžeme využít matematickou operaci integrování.

Okamžitou rychlost postupnými úpravami vyjádříme ze vztahu pro okamžité zrychlení objektu:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Jako první si ze vzorce vyjádříme dv_x:

$$dv_x = a_x dt.$$

Následně obě strany rovnice integrujeme a získáme následující vztah:

$$\int dv_x = \int a_x dt.$$

Z teoretické části o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu víme, že zrychlení je při tomto pohybu konstantní, vytkneme tedy konstantu před integrál a získáme:

$$\int dv_x = a_x \int dt.$$

Upravením vztahu dostaneme vzorec pro okamžitou rychlost:

$$\boldsymbol{v_x = a_x t + c},$$

kde c je integrační konstanta. Tu vypočítáme jednoduše z počáteční podmínky pro rychlost objektu, což znamená, že do vztahu dosadíme čas $t = 0\,s$ a za okamžitou rychlost v_x objektu dosadíme počáteční rychlost v_{0x}.

$$v_{0x} = a_x \cdot 0 + c \rightarrow v_{0x} = c$$

Tedy pokud označíme $v_x(0)$ jako v_0, dostaneme vztah

$$\boldsymbol{v_x(t) = v_0 + a_x \cdot t}.$$

Jelikož je nám známo, že se objekt pohybuje v časovém intervalu $t \in \langle 0; t \rangle$, můžeme využít určitého integrálu. Vztah pak bude vypadat následovně:

$$\int_0^t dv_x(u) = a_x \int_0^t du.$$

Jedinou změnu pocítíme při přeznačení proměnné za integrandem. K tomuto přeznačení dochází z toho důvodu, že dosazením horní meze t do určitého integrálu se právě t stává „konstantou b“. Proto přeznačíme proměnnou za intagrandem u.

Zintegrováním získáme vztah:

$$[v_x(u)]_0^t = a_x[u]_0^t,$$

který rozepíšeme a získáme finální podobu vzorce:

$$\boldsymbol{v_x(t) - v_x(0) = a_x \cdot (t - 0)}.$$

Stejným principem se pokusíme dopracovat ke vztahu pro polohu pohybovaného objektu. Výchozím vztahem nám bude:

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

který si upravíme na tvar:

$$dx = v_x dt,$$

a následně integrujeme obě strany rovnice:

$$\int dx = \int v_x dt.$$

Z předchozího výpočtu víme, že $c = v_{0x}$, to znamená, že vzorec $v_x = a_x t + c$ lze přepsat do tvaru $v_x = a_x t + v_{0x}$. Pak tedy můžeme nahradit okamžitou rychlost v_x v zápisu integrálu následujícím způsobem:

$$\int dx = \int (a_x t + v_{0x})\, dt.$$

Víme, že počáteční rychlost je konstantní, proto ji můžeme vytknout před integrál a dostaneme vztah:

$$\int dx = v_{0x} \int dt + \int a_x t\, dt.$$

Integrací obou stran získáme konečný vztah pro polohu x objektu při rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu:

$$\boldsymbol{x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + c'},$$

kde c' je i v tomto případě integrační konstantou. Vyjádřit ji lze taktéž z počáteční podmínky, kterou je čas $t = 0\ s$, ve kterém je poloha shodná s počáteční polohou $x = x_0$. Pak platí:

$$x_0 = v_{0x} \cdot 0 + \frac{1}{2} a_x \cdot 0 + c' \rightarrow x_0 = c'.$$

Tedy pokud označíme $\mathrm{x}(0)$ jako x_0, dostaneme vztah

$$\boldsymbol{x(t) = x_0 + v_{0x} t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}}.$$

Stejně jako v předchozím případě víme, že se objekt pohybuje v časovém intervalu $t \in \langle 0; t \rangle$, můžeme tedy využít určitého integrálu. Vztah pak bude vypadat následovně:

$$\int_0^t dx(u) = \int_0^t (a_x u + v_{0x})\, du.$$

Vztah můžeme rozepsat následujícím způsobem:

$$\int_0^t dx(u) = a_x \int_0^t u\, du + v_{0x} \int_0^t du,$$

kde i tentokrát zavedeme přeznačení proměnné t za integrandem na u.

Zintegrováním získáme vztah

$$[x(u)]_0^t = a_x [u^2]_0^t + v_{0x} [u]_0^t,$$

který následně upravíme do finální podoby:

$$\boldsymbol{x(t) - x(0) = v_{0x} t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}}.$$

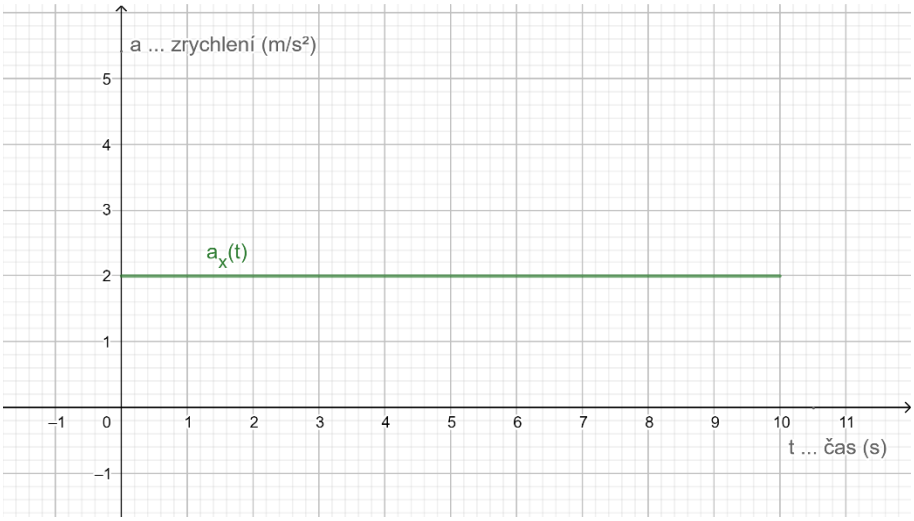
4.7.1 Příklad

Příklad: Daný objekt se pohyboval v časovém intervalu $t \in \langle 0\ s; 10\ s \rangle$.

- Sestrojte pro pohyb tohoto objektu, o kterém víme, že se pohyboval 2 metry od počátku se zrychlením $a_x = 2\, m/s^2$ a jeho počáteční rychlost byla $v_{0x} = 1\, m/s$, grafy závislosti všech veličin, které popisují tento pohyb, na čase.
- Vypočítejte hodnoty jednotlivých veličin v čase $t = 4\ s$.

Jako první sestrojíme grafy závislosti všech veličin na čase.

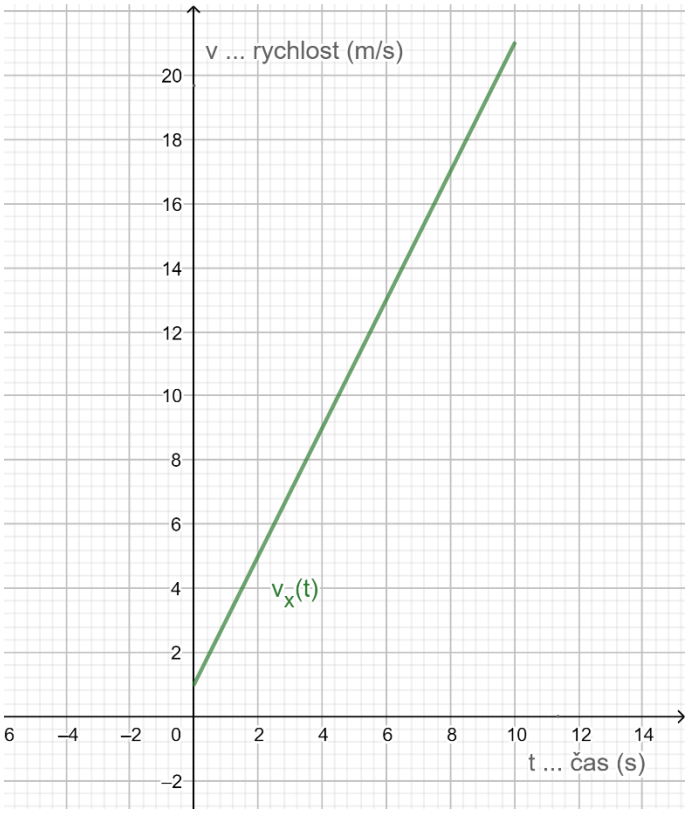
Ze zadání známe hodnotu zrychlení a_x, které je konstantní. Sestrojení grafu tedy bude velmi jednoduché.



Obrázek 28

Dále si vypočítáme předpis funkce pro okamžitou rychlost v_x. Využijeme zde vzorců odvozených z integrace $v_x = a_x t + c$ a $v_{0x} = c$. Nejdříve si musíme samozřejmě vypočítat konstantu c. O té víme, že se rovná počáteční rychlosti v_{0x}, která má hodnotu $v_{0x} = 1\,m/s$. Nyní, když známe hodnotu zrychlení a_x i konstanty c, můžeme napsat předpis funkce pro okamžitou rychlost v_x a sestrojit pro ni graf. Tím bude lineární funkce.

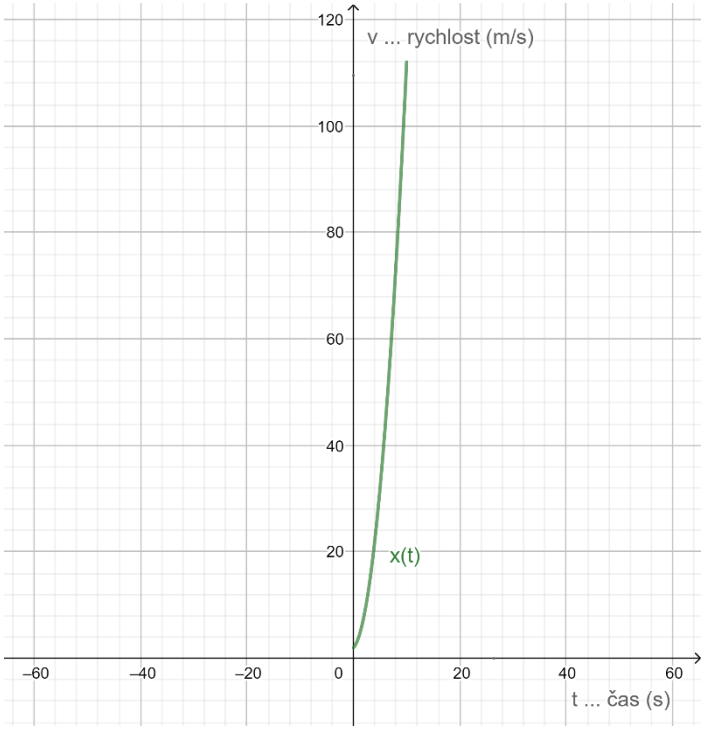
$v_x(t) = 2t + 1$



Obrázek 29

Poslední graf, který zde můžeme sestrojit, je graf funkce pro polohu $x(t)$ pohybujícího se objektu. K vypočítání předpisu si opět dopomůžeme vzorci $x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 + c'$ a $x_0 = c'$. Ze zadání již známe počáteční rychlost $v_{0x} = 1\,m/s$, zrychlení $a_x = 2\,m/s^2$ i počáteční polohu x_0, o které víme, že je 2 metry od počátku, tudíž $x_0 = 2\,m$. Dále víme, že $x_0 = c'$, tudíž integrační konstanta $c' = 2$. Teď již poskládáme dohromady předpis funkce pro polohu $x(t)$ objektu. Bude se jednat o kvadratickou funkci.

$$x(t) = t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2 + 2 \rightarrow x(t) = t^2 + t + 2$$



Obrázek 30

Jako druhý úkol máme vypočítat hodnoty jednotlivých veličin v čase $t = 4\,s$. To uděláme jednoduše, pouze pomocí dosazení do našich už vyjádřených předpisů.

První veličinou, kterou jsme se zabývali, bylo zrychlení a_x, které se v našem případě nemění, je tedy konstantní $a_x = 2\,m/s^2$. Zde nic počítat nemusíme.

Druhou veličinou byla okamžitá rychlost v_x, pro kterou jsme vypočítali předpis $v_x(t) = 2t + 1$. Okamžitá rychlost v čase $t = 4\,s$ je tedy:

$v_x(4\,s) = 2 \cdot 4 + 1 = 9\,m/s$

Třetí a poslední veličinou byla poloha x objektu, pro kterou jsme taktéž vypočítali předpis $x(t) = t^2 + t + 2$. Poloha objektu v čase $t = 4\ s$ je tedy:
$x(4\ s) = 4^2 + 4 + 2 = 22\ m$ ■

4.8 Zrychlení volného pádu

Speciálním případem zrychlení je tzv. zrychlení volného pádu neboli tíhové zrychlení, které značíme písmenem g.

Zrychlení volného pádu g je konstantní zrychlení, se kterým se pohybuje objekt volně puštěný z libovolné výšky v blízkosti povrchu Země. Hodnota zrychlení volného pohybu g se mírně mění v závislosti na zeměpisné šířce a nadmořské výšce. Ve středních zeměpisných šířkách byla hodnota tíhového zrychlení g stanovena na $g \doteq 9{,}8\, m/m^2$.

Veličinu zrychlení volného pádu g používáme při počítání příkladů pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb, pokud se bude jednat o pohyb svislým směrem k povrchu Zemi v případě, že zanedbáme odpor vzduchu. Tento pohyb se nazývá *svislý vrh*.

Rovnice pro zrychlení rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu a_x budou platit stejně i pro zrychlení volného pádu g. Důležité je ovšem si zde uvědomit, jak můžeme popsat pohyb objektu u svislého vrhu. Jednoduchým příkladem pro naši představu nám může být kulička, která padá volným pádem z výšky deseti metrů. Kulička bude mít v čase $t = 0\ s$ nulovou rychlost a maximální polohu, v našem případě $x(0\ s) = 10\ m$. Jakmile se kulička začne pohybovat volným pádem, začne se rychlost kuličky v_x zvyšovat a poloha kuličky x bude klesat. Naopak u rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu jsme počítali příklady, kdy se objekt pohyboval se zrychlením a_x a rychlost se měnila úměrně poloze. Proto zavedeme dvě změny.

- První změnou je zavedení popisu pohybu objektu na svislé ose y místo osy x. Rychlost budeme tedy označovat v_y a zrychlení dostane označení a_y.
- Druhou změnou oproti rovnoměrně zrychlenému přímočarému pohybu bude vyjádření zrychlení, které je záporné vlivem zvolené orientace osy y. Zrychlení je záporné proto, že volný pád je pohyb v opačném směru (svisle dolů) vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic neboli vzhledem ke směru rostoucích kladných hodnot polohy y svisle vzhůru. Platí tedy, že okamžité zrychlení se rovná zápornému tíhovému zrychlení $a_y = -g$, které budeme dosazovat do vztahů pro

pohyb objektu právě rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu a získáme následující vztahy pro pohyb volného pádu.

$$\boldsymbol{v_y = v_{0y} - gt}$$

$$\boldsymbol{y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2}$$

$$\boldsymbol{v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}$$

$$\boldsymbol{y - y_0 = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t}$$

$$\boldsymbol{y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2}gt^2}$$

4.8.1 Příklad

Příklad: Jakou rychlostí musíme svisle vzhůru vyhodit míček, aby dosáhl výšky $y = 50\ m$? Za jak dlouho po vyhození dopadne zpět na zem?

Využijeme rovnice:

$\boldsymbol{v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)} \rightarrow 0 = v_{0y}^2 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot (50 - 0) \rightarrow v_{0y}^2 = 981\ m^2/s^2 \rightarrow$

$\rightarrow v_{0y} = 31{,}321\, m/s$ ■

$\boldsymbol{v_y = v_{0y} - gt} \rightarrow 0 = 31{,}321 - 9{,}81 \cdot \mathrm{t} \rightarrow \mathrm{t} = 3{,}193\ \mathrm{s}$ … polovina celkové doby

celková doba … $celk.t = 2t = 6{,}3856\ s$ ■

Odpovědi: Pro to, aby míček dosáhl výšky 50 metrů, musí být svisle vzhůru vyhozen rychlostí $v_{0y} = 31{,}321\, m/s$. Míček dopadne zpět na zem za $t = 6{,}3856\ s$.

Závěr

Bakalářská práce je postavena na tématech matematické analýzy, kterými jsou derivace, neurčitý a určitý integrál, a jejich využití při popisu pohybu hmotného bodu v dvojrozměrném prostoru.

Na začátku práce je kladen důraz na objasnění limity funkce, která je klíčovým pojmem pro vysvětlení následujícího tématu – derivace, kterou práce pokračuje společně s neurčitým a určitým integrálem. Všechny tyto tři matematické nástroje jsou po teoretickém úvodu doplněny několika vypočítanými ukázkovými příklady, jež dotvářejí představu čtenáře o tom, jakým způsobem fungují. Poslední část práce dospívá k možné aplikaci uvedených matematických nástrojů při popisu pohybu rovnoměrně přímočarém a rovnoměrně zrychleném.

Obsah práce je možné využít jako pomocný učební materiál pro studenty posledních ročníků středních škol/gymnázií nebo pro studenty vysokých škol pro rozšíření jejich obzorů v dané problematice.

Hlavním cílem této práce bylo poukázat na možné propojení matematické analýzy s předmětem fyzika v oblasti zabývající se přímočarým pohybem hmotného bodu v dvojrozměrném prostoru.

Pevně věřím, že se mně stanovený cíl splnit podařilo. Využití nástrojů matematické analýzy je četné, je možné ji spárovat s několika různými přírodovědeckými obory, jako je například fyzikální chemie.

Přirozeným rozšířením mé práce v možných aplikacích derivací a integrálů by bylo použití většiny pojmů pro popis pohybu hmotného bodu v prostoru třírozměrném, k čemuž by bylo potřeba objasnit další pojmy charakterizující pohyb v tomto prostoru, kterými jsou vektory a křivky v prostoru, které lze popsat jako grafy vektorových funkcí.

Použitá literatura

HALLIDAY, David, RESNICK, Robert a WALKER, Jearl. *Fyzika 1*. Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. 2. vyd. Brno: VUTIUM, 2013. Czech Edition. ISBN 978-80-214-4123-1.

KLUVÁNEK, Igor, MIŠÍK, Ladislav a ŠVEC, Marko. *Matematika I*. Pre štúdium technických vied. 3. vyd. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1966. Edice teoretické literatúry.

HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet.* 2. upravené vyd. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 807-19-62104.

PANÁK, Martin, SLOVÁK, Jan a BULANT, Michal. *Matematika drsně a svižně.* 2013. ISBN 978-80-210-6307-5. doi: 10.5817/CZ.MUNI.O210-6380-2013.

LEPIL, Oldřich a kolektiv. *Fyzika*. Sbírka úloh pro střední školy. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2010. Edice Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-266-3.

KALVODA, Tomáš a VAŠATA, Daniel. *Základy matematické analýzy.* Derivace [online]. Praha: České vysoké učení v Praze, 2017. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Základy matematické analýzy - Derivace (cvut.cz).

LEPKA, Karel. *MA1 – přednáška* [online]. Brno, 2019 [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: MA1-prednaska.pdf (muni.cz).

LEPKA, Karel. *MA2 – přednáška* [online]. Brno, 2019 [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: MA2-prednaska.pdf (muni.cz).

Matematika.cz. *Derivace funkce* [online]. Nová média. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Derivace funkce — Matematika.cz.

Matematika.cz. *Integrál* [online]. Nová média. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Integrál — Matematika.cz.

Matematika.cz. *Určitý integrál* [online]. Nová média. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Určitý integrál — Matematika.cz.

ČVUT Fakulta elektrotechnická. *Riemannův integrál* [online]. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Math Tutor - Integral - Theory - Introduction (cvut.cz).

ČVUT Fakulta elektrotechnická. *Vlastnosti Riemannova integrálu* [online]. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Math Tutor - Integral - Theory - Introduction (cvut.cz).

ČVUT Fakulta elektrotechnická. *Newtonův integrál (primitivní funkce)* [online]. [cit. 13. 4. 2021]. Dostupné z: Math Tutor - Integral - Theory - Introduction (cvut.cz).

ISIBALO. *29 – Newton – Liebnizova formule a důkaz (MAT – Integrální počet – integrace)* [online]. [cit. 18. 4. 2021]. Dostupné z: 29 - Newton-Liebnizova formule a důkaz (MAT - Integrální počet - integrace) - YouTube.